

## MODELOWANIE PRZEPIYWÓW NIEUSTALONYCH NA TERENACH ZALEWOWYCH Z WYKORZYSTANIEM DWUWYMIAROWEGO RÓWNIANIA FALI DYFUZYJNEJ

Dariusz Gąsiorowski, Wojciech Artichowicz

Politechnika Gdańska

**Streszczenie.** Zjawisko propagacji fali powodziowej na terenie zalewowym można modelować za pomocą równań płytkiej wody. W związku z tym, że w fazie początkowej napływu wód teren zalewowy nie jest pokryty wodą, równania płytkiej wody muszą być rozwiązywane w obszarze o zmiennej w czasie geometrii. W konsekwencji obszar ten jest ograniczony przez linię czoła propagującej fali, która oddziela teren suchy od zajętego przez wodę. W takiej sytuacji w rozwiązaniu numerycznym w pobliżu czoła fali występują duże wartości prędkości oraz bardzo małe, a nawet ujemne głębokości. Może to prowadzić do generowania niestabilności i załamania obliczeń. Powyższych problemów wynikających z zastosowania pełnych równań wody płytkiej można uniknąć poprzez wykorzystanie uproszczonego modelu fali dyfuzyjnej. W pracy przedstawiono model fali dyfuzyjnej uwzględniający infiltrację wody w głąb gruntu. Proces infiltracji został uwzględniony w wyniku sprzężenia równania Hortona z dwuwymiarowym równaniem fali dyfuzyjnej poprzez człon źródłowy. Rozwiązanie dwuwymiarowego równania fali dyfuzyjnej otrzymano, wykorzystując metodę dekompozycji kierunkowej oraz dekompozycję względem procesów fizycznych. Otrzymane równania rozwiązano zmodyfikowaną metodą elementów skończonych. Podejście takie umożliwia opracowanie efektywnego oraz stabilnego schematu numerycznego, który jednocześnie pozwala na uzyskanie odpowiedniej dokładności wymaganej podczas symulacji zjawiska propagacji fali powodziowej na terenach zalewowych.

**Słowa kluczowe:** równanie fali dyfuzyjnej, propagacja fali wezbraniowej, infiltracja, tereny zalewowe, metoda elementów skończonych

### WPROWADZENIE

Podczas przejścia fali wezbraniowej w korycie rzeki przyległe tereny dolin rzecznych często ulegają okresowemu zalewaniu. Napływ wód powodziowych na te tereny może przebiegać w sposób niekontrolowany, np. w wyniku przerwania wału przeciwpowodzi-

---

Adres do korespondencji – Corresponding authors: dr inż. Dariusz Gąsiorowski, dr inż. Wojciech Artichowicz, Wydział Inżynierii Łądowej i Środowiska, Politechnika Gdańska, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk, e-mail: [gador@pg.gda.pl](mailto:gador@pg.gda.pl), [wojartic@pg.gda.pl](mailto:wojartic@pg.gda.pl).

© Copyright by Wydawnictwo Uniwersytetu Rolniczego w Krakowie, Kraków 2016

wego, lub w sposób kontrolowany na obszary polderów sterowanych. Do najważniejszych zagadnień związanych z modelowaniem propagacji fali, czyli przepływu nieustalonego, na terenach zalewowych należy określenie głębokości wody i zasięgu zalewu oraz czasu, w jakim dochodzi do zalania zagrożonych terenów.

Przepływ nieustalony zarówno w rzece, jak i w terenie zalewowym może być opisany za pomocą modelu fali dynamicznej w postaci równań płytkiej wody [Esteves i in. 2000, Heniche i in. 2000, Horritt 2002, Liang i Borthwick 2009]. Sformułowanie zagadnienia rozwiązania równań płytkiej wody w celu modelowania przepływu w korycie rzeczonym jest problemem standardowym i dobrze rozpoznany. Inaczej jednakże przedstawia się problem rozwiązania tych równań w przyległym terenie zalewowym. W początkowej fazie napływu wód teren ten nie jest pokryty wodą, w związku z tym dwuwymiarowe równania płytkiej wody muszą być rozwiązywane w obszarze, który jest ograniczony przez linię czoła propagującej fali. Linia ta oddziela teren suchy, gdzie występują zerowe wartości głębokości, od terenu zajętego przez wodę. Wobec tego kształt obszaru pokrytego wodą ulega ciągłym zmianom w czasie. Dodatkowo w pobliżu frontu propagującej fali występują małe głębokości wody, co z kolei implikuje pojawianie się dużych wartości prędkości. Próba rozwiązania równań płytkiej wody w takim obszarze za pomocą standardowych metod numerycznych (np. metody różnic czy elementów skończonych) prowadzi do komplikacji, objawiających się oscylacjami uzyskanego rozwiązania, które w efekcie końcowym mogą powodować załamanie obliczeń. W celu uniknięcia opisanych trudności podjęto próby rozwiązania równań płytkiej wody z wykorzystaniem algorytmów numerycznych bazujących na metodzie objętości skończonych [Di Giammarco i in. 1996, Szydłowski i Magnuszewski 2007, Gąsiorowski 2011]. Jednakże metoda ta w przypadku uwzględnienia suchego obszaru wymaga zastosowania modyfikacji, które komplikują algorytm numeryczny oraz niejednokrotnie powodują obniżenie dokładności rozwiązania.

W celu uniknięcia przedstawionych problemów wynikających z zastosowania pełnych równań wody płytkiej coraz częściej poszukuje się alternatywnych modeli do opisu przepływów na terenach zalewowych. Jedną z propozycji stanowi uproszczony model propagacji fali wezbraniowej w postaci modelu fali dyfuzyjnej [Lal 1998, Prestininzi 2008, Moussa i Bocquillon 2009]. Model ten otrzymuje się poprzez pominięcie siły bezwładności w równaniach dynamicznych przepływu płytkiej wody, przy jednoczesnym zachowaniu równania ciągłości w niezmiennionej formie. W wyniku odpowiednich przekształceń uproszczony układ równań fali dyfuzyjnej można zredukować do jednego dwuwymiarowego równania transportu zapisanego w następującej formie [Hromadka i Yen 1986]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \Phi \quad (1)$$

gdzie:

- $t$  – czas, s,
- $x, y$  – współrzędne przestrzenne, m,
- $H$  – rzędna zwierciadła wody ponad przyjęty poziom porównawczy, m n.p.p.,
- $\Phi = p-f-e$  – człon źródłowy uwzględniający opad atmosferyczny ( $p$ ), infiltrację ( $f$ ) oraz ewapotranspirację ( $e$ ),  $m \cdot s^{-1}$ ,
- $K$  – współczynnik dyfuzji hydraulicznej ( $m^2 \cdot s^{-1}$ ) wyrażony za pomocą formuły:

$$K_x = \frac{1}{n} h^{5/3} \left| \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{-1/2}, \quad K_y = \frac{1}{n} h^{5/3} \left| \frac{\partial H}{\partial y} \right|^{-1/2} \quad (2a, 2b)$$

gdzie:

$h = H - Z$  – głębokość wody, m,

$Z$  – rzędna dna ponad przyjęty poziom porównawczy, m n.p.p.

$n$  – współczynnik szorstkości wg Manninga,  $m^{-1/3} \cdot s$ .

Proces rozwiązania numerycznego równania fali dyfuzyjnej w formie (1) nie wymaga specjalnego traktowania zmiennego w czasie brzegu obszaru, który wynika z przemieszczającego się frontu fali rozdzielającego teren suchy od pokrytego wodą. Położenie tego brzegu w danej chwili czasowej otrzymuje się jako wynik numerycznego rozwiązania równania w rozważanym obszarze. Dzięki zastosowanym uproszczeniom, do rozwiązania równania fali dyfuzyjnej można wykorzystać algorytmy mniej skomplikowane i tym samym bardziej efektywne ze względu na czas obliczeń niż w przypadku rozwiązywania równań płytkiej wody. W kontekście prowadzenia symulacji dla rozległych terenów zalewowych zagadnienie to ma bardzo istotne znaczenie.

Podczas propagacji fali wezbraniowej na terenie zalewowym część objętości wody może infiltrować od powierzchni w głąb gruntu. Sprzężenie procesu infiltracji z równaniem opisującym przepływ nieustalony najczęściej wykonuje się poprzez człon źródłowy występujący w równaniu reprezentującym zasadę zachowania masy [Esteves i in. 2000, Liu i in. 2004]. Do opisu zmienności procesu infiltracji w czasie przyjęto równanie Hortona w następującej formie [Chow i in. 1988]:

$$f(t) = f_c + (f_o - f_c) \exp(-k \cdot t), \quad (3)$$

gdzie:

$f(t)$  – chwilowe natężenie infiltracji,  $mm \cdot h^{-1}$ ,

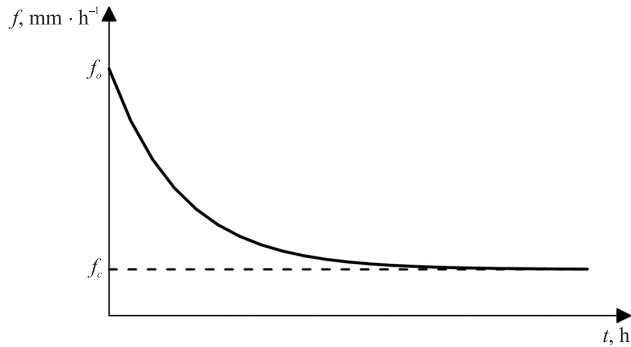
$f_c$  – maksymalne natężenie infiltracji w stanie nasycenia zależne od rodzaju gruntu,  $mm \cdot h^{-1}$ ,

$f_o$  – początkowe natężenie infiltracji, zależne od rodzaju gruntu i wilgotności,  $mm \cdot h^{-1}$ ,

$k$  – stała zanikania,  $h^{-1}$ .

Z równania Hortona wynika, że w miarę upływu czasu natężenie infiltracji maleje w sposób wykładniczy i zmierza do ustalonej wartości natężenia infiltracji w stanie nasycenia  $f_c$ , którego wartość zależy od rodzaju gruntu (ryc. 1). Przebieg procesu infiltracji jest zgodny z równaniem (3) oraz krzywą przedstawioną na rysunku 1 tylko przy założeniu ciągłego zasilania opadem powierzchni gruntu.

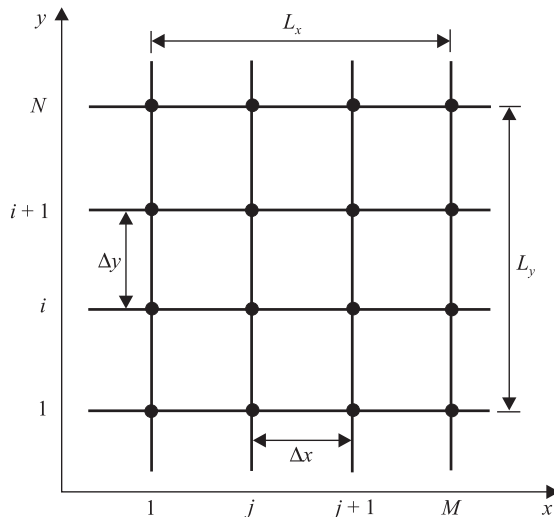
Czas  $t$  w równaniu Hortona liczony jest od momentu pokrycia wodą powierzchni terenu. W związku z tym podczas fazy napływu wody na teren polderu w różnych miejscach obszaru proces infiltracji jest inicjowany w różnych momentach czasowych, czyli wówczas gdy front fali wezbraniowej dotrze do danego miejsca. Z tego powodu proces infiltracji uwzględniany jest w obliczeniach dopiero wtedy, gdy głębokości wody w danym obszarze przyjmują wartości większe od zera.



Ryc. 1. Zmienność natężenia infiltracji w czasie według równania Hortona  
 Fig. 1. The infiltration rate change in time according to the Horton's formula

## NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE RÓWNANIA FALI DYFUZYJNEJ

W celu uproszczenia algorytmu rozwiązania, dwuwymiarowe równanie fali dyfuzyjnej (1) można poddać procesowi przestrzennej dekompozycji względem kierunku  $x$  oraz  $y$ . W wyniku takiego zabiegu w każdym kroku czasowym dwuwymiarowe równanie jest rozszczepiane na szereg zagadnień jednowymiarowych, które oddzielnie opisują proces propagacji fali odpowiednio w kierunku  $x$  oraz  $y$  [Szymkiewicz 1993, Gąsiorowski 2013]. Metoda przestrzennej dekompozycji prowadzi do prostokątnego obszaru rozwiązania o wymiarach  $L_x \times L_y$  pokrytego regularną siatką węzłów o wymiarach  $\Delta x \times \Delta y$  (ryc. 2), w której liczba węzłów siatki wynosi  $N \times M$  (gdzie:  $N$  – liczba wierszy,  $M$  – liczba kolumn).



Ryc. 2. Prostokątna siatka obszaru rozwiązania  
 Fig. 2. Rectangular grid of the solution domain

W procesie rozwiązywania dwóch jednowymiarowych równań różniczkowych powstające w wyniku dyskretyzacji układy równań algebraicznych mają znacznie mniejsze wymiary niż w przypadku rozwiązywania jednego równania dwuwymiarowego (1). Dzięki temu otrzymujemy mniej złożony i bardziej efektywny algorytm rozwiązania. Ponadto zastosowanie prostokątnej siatki węzłów sprawia, że przestrzenna dyskretyzacja jest bardzo łatwa do wykonania. Pokrywając prostokątną siatką węzłów obszar o dowolnej geometrii, należy jedynie zapewnić, aby siatka ta objęła wszystkie fragmenty obszaru, do których może dotrzeć front propagującej fali wezbraniowej.

Dekompozycja może być przeprowadzona również ze względu na rodzaj fizycznego procesu uwzględnionego w równaniu. Wykorzystane dwuwymiarowe równanie (1) opisuje proces transportu dyfuzyjnego z członem źródłowym  $\Phi$ , który reprezentuje ubytek lub przyrost warstwy wody w wyniku opadu atmosferycznego, infiltracji oraz ewapotranspiracji. Wobec tego wyjściowe równanie (1) może być rozszczepione na dwa równania opisujące przenoszenie dyfuzyjne (odpowiednio w kierunku  $x$  i  $y$ ) oraz na jedno równanie zawierające człon źródłowy  $\Phi$ . Uwzględniając łączny efekt dekompozycji kierunkowej oraz dekompozycji względem członu źródłowego rozwiązanie równana dyfuzji (1) na danym poziomie czasowym  $t + \Delta t$  przebiega w trzech podstawowych etapach. W pierwszym etapie rozwiązywane są jednowymiarowe równania w kierunku  $x$  dla każdego wiersza  $i = 1, 2, \dots, N$ :

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial H^{(1)}}{\partial x} \right) = 0 \quad (4)$$

z warunkiem początkowym  $H^{(1)}(x, y, t) = H(x, y, t_0)$ . Otrzymane rozwiązanie  $H^{(1)}(x, y, t + \Delta t)$  równania (4) na danym poziomie czasowym jest następnie wykorzystywane w drugim etapie do rozwiązania równań w kierunku  $y$  dla każdej kolumny  $j = 1, 2, \dots, M$ :

$$\frac{\partial H^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial H^{(2)}}{\partial y} \right) = 0 \quad (5)$$

z warunkiem początkowym  $H^{(2)}(x, y, t) = H^{(1)}(x = x_j, y, t = t_0 + \Delta t)$ . W trzecim etapie rozwiązywane jest natomiast równanie (zapisane dla każdego węzła) zawierające tylko człon źródłowy, tu reprezentujący jedynie proces infiltracji:

$$\frac{\partial H^{(3)}}{\partial t} = f \quad (6)$$

Warunkiem początkowym dla rozwiązania równania (6) jest  $H^{(3)}(x, y, t) = H^{(2)}(x, y, t + \Delta t)$ , gdzie  $H^{(2)}(x, y, t + \Delta t)$  stanowi rozwiązanie równania (5) otrzymane podczas drugiego etapu obliczeń. Rozwiązanie otrzymane po trzecim etapie obliczeń jest jednocześnie poszukiwanym rozwiązaniem na poziomie czasu  $t + \Delta t$  ( $H^{(3)}(x, y, t + \Delta t) = H(x, y, t + \Delta t)$ ).

Wynikające z procesu dekompozycji przestrzennej jednowymiarowe równania fali dyfuzyjnej (4) oraz (5) wymagają rozwiązania za pomocą dowolnej metody numerycznej takiej jak metoda różnic, elementów czy objętości skończonych. Różnice wynikające

ze stosowania poszczególnych metod uwidaczniają się przede wszystkim w sposobie przestrzennej dyskretyzacji tych równań. Najczęściej wykorzystywane są algorytmy bazujące na metodzie różnic skończonych, których przykłady zastosowań w kontekście modelowania przepływów na terenach zalewowych można znaleźć w pracach: Cunge [1975], Hromadka i Yen [1986], Bates i in. [2010]. Do przestrzennej aproksymacji równania fali dyfuzyjnej można także zastosować zmodyfikowaną metodę elementów skończonych (MES) [Szymkiewicz 2010]. Modyfikacja w stosunku do standardowej MES związana jest ze zmianą procesu całkowania w przestrzeni wyjściowego równania różniczkowego. Podejście takie wykorzystano do rozwiązania dwuwymiarowego równania [Szymkiewicz i Gąsiorowski 2012], jak również jednowymiarowego równania fali dyfuzyjnej [Gąsiorowski 2013].

Zastosowanie zmodyfikowanej MES do równania fali dyfuzyjnej (4) w kierunku  $x$ , (oddzielnie dla każdego wiersza  $i = 1, 2, \dots, N$ ) oraz przyjęcie warunków brzegowych Dirichleta, prowadzi do następującego układu równań różniczkowych:

- $j = 1$

$$\omega \frac{\Delta x}{2} \frac{dH_1}{dt} + (1-\omega) \frac{\Delta x}{2} \frac{dH_2}{dt} - \frac{\bar{K}_1}{\Delta x} (-H_1 + H_2) = 0 \quad (7a)$$

- $j = 2, 3, \dots, M-1$

$$(1-\omega) \frac{\Delta x}{2} \frac{dH_{j-1}}{dt} + \omega \cdot \Delta x \frac{dH_j}{dt} + (1-\omega) \frac{\Delta x}{2} \frac{dH_{j+1}}{dt} + \frac{\bar{K}_{j-1}}{\Delta x} (-H_{j-1} + H_j) - \frac{\bar{K}_j}{\Delta x} (-H_j + H_{j+1}) = 0 \quad (7b)$$

- $j = M$

$$(1-\omega) \frac{\Delta x}{2} \frac{dH_{M-1}}{dt} + \omega \frac{\Delta x}{2} \frac{dH_M}{dt} - \frac{\bar{K}_{M-1}}{\Delta x} (-H_{M-1} + H_M) = 0 \quad (7c)$$

gdzie:

- $j$  – indeks węzła w kierunku  $x$ ,
- $H_j = H_j(t)$  – wartość węzłowa funkcji  $H(x, t)$  w węźle  $j$ ,
- $\Delta x$  – krok przestrzenny pomiędzy węzłami (ryc. 2),
- $\omega$  – parametr wagowy,
- $\bar{K}_j$  – średnia wartość współczynnika dyfuzji w węźle  $j$ .

Układ równań (7a,b,c) można także zapisać w notacji macierzowej w następujący sposób:

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (8)$$

gdzie:

- $\mathbf{H} = [H_1, \dots, H_j, H_{j+1}, \dots, H_M]^T$  – kolumnowy wektor wartości węzłowych funkcji  $H(t)$ ,
- $\mathbf{A}$  – macierz trójdiagonalna ze stałymi elementami o wymiarach  $M \times M$ ,

**B** – macierz trójdzielna o wymiarach  $M \times M$ , której elementy zależą od elementów wektora rozwiązania **H**.

Identyczna dyskretyzacja przestrzenna zastosowana do równania fali dyfuzyjnej (5) w kierunku  $y$  dla każdej kolumny  $j = 1, 2, \dots, M$  prowadzi do analogicznego układu równań różniczkowych zwyczajnych. W tym przypadku macierze trójdzielne **A** i **B** są o wymiarach  $N \times N$ , natomiast wektor kolumnowy określony jest następująco  $\mathbf{H} = [H_1, \dots, H_p, H_{i+1}, \dots, H_N]^T$ .

W równaniach (7a, b, c) parametr wagowy  $\omega$  może przyjmować wartości z zakresu 0 do 1. W przypadku wartości  $\omega = 1$  zastosowana metoda prowadzi do formuły odpowiadającej metodzie różnic skończonych, natomiast dla  $\omega = 2/3$  otrzymane równanie (3) jest zgodne z standardową metodą elementów skończonych [Szymkiewicz 2010].

Współczynniki dyfuzji hydraulicznej w równaniu dyfuzji (1) są związane nieliniową zależnością z rzędną zwierciadła wody. Na etapie przestrzennej dyskretyzacji równania (4) założono, że współczynnik dyfuzji w danym węźle przyjmuje stałą w danym kroku czasowym średnią wartość  $\bar{K}$ . Silna nieliniowość relacji (2) oraz niewłaściwy sposób aproksymacji współczynnika może prowadzić do wystąpienia komplikacji podczas numerycznego rozwiązywania równania fali dyfuzyjnej. Problem ten można zaobserwować w zagadnieniach związanych z symulacją propagacji fali na terenach zalewowych o zróżnicowanej batymetrii. Wówczas symulacja przepływu w pobliżu wzniesień i zagłębień terenowych prowadzi do niefizycznych rozwiązań objawiających się np. w nadmiernej akumulacji objętości wody nad wzniesieniami. Satisfakcjonujące rozwiązanie można uzyskać poprzez zastosowanie następującego sposobu uśredniania współczynnika dyfuzji [Gąsiorowski 2014]:

$$\bar{K}_j = \frac{K_j + K_{j+1}}{2}, \quad (9)$$

gdzie wartości węzłowe współczynnika dyfuzji  $K_j$  oraz  $K_{j+1}$  są określone jako:

$$K_j = \frac{1}{n} h_j^{5/3} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j \right)^{-1/2}, \quad K_{j+1} = \frac{1}{n} h_{j+1}^{5/3} \left( \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{j+1} \right)^{-1/2} \quad (10a, 10b)$$

W powyższych wzorach wielkości  $h_j$  oraz  $h_{j+1}$  reprezentują wartości węzłowe głębokości  $h(x, t)$ , natomiast przestrzenna pochodna jest aproksymowana za pomocą ilorazu różnicowego przedniego:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_j = \frac{H_{j+1} - H_j}{\Delta x} \quad (11)$$

Ponadto w przypadku występowania zerowych oraz ujemnych głębokości wody, lub bardzo małych wartości pochodnej przestrzennej (gdy  $\partial H / \partial x < 10^{-6}$ ) zakłada się, że współczynnik dyfuzji w danym węźle określony równaniem (10) będzie przyjmował zerową wartość. Zaprezentowany sposób wyznaczenia współczynnika dyfuzji zapewnia uzyskanie poprawnego i odpowiednio dokładnego rozwiązania numerycznego dla

szerokiego zakresu analizowanych przepływów, jakie mogą wystąpić na terenie zalewowym.

Problem rozwiązania układu równań różniczkowych (8) oraz równania (6) stanowi zagadnienie początkowe. W ramach tego zagadnienia, dla czasu  $t \geq t_0$  poszukuje się rozwiązania stanowiącego wektor wartości węzłowych  $\mathbf{H}(t)$ , który spełni wyjściowy układ równań oraz zadany warunek początkowy  $\mathbf{H}(t_0) = \mathbf{H}_0$ . W celu rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia można wykorzystać metodę numerycznego całkowania w formie dwupoziomowego schematu różnicowego [Szymkiewicz 2010]:

$$\mathbf{H}_{t+\Delta t} = \mathbf{H}_t + \Delta t \left( (1-\theta) \frac{d\mathbf{H}}{dt} \Big|_t + \theta \frac{d\mathbf{H}}{dt} \Big|_{t+\Delta t} \right) \quad (12)$$

gdzie:

- $\mathbf{H}_{t+\Delta t}$ ,  $\mathbf{H}_t$  – wektory wartości węzłowych odpowiednio na poziomie czasu  $t+\Delta t$  oraz  $t$ ,
- $\Delta t$  – krok czasowy,
- $\theta$  – parametr wagowy z zakresu od 0 do 1.

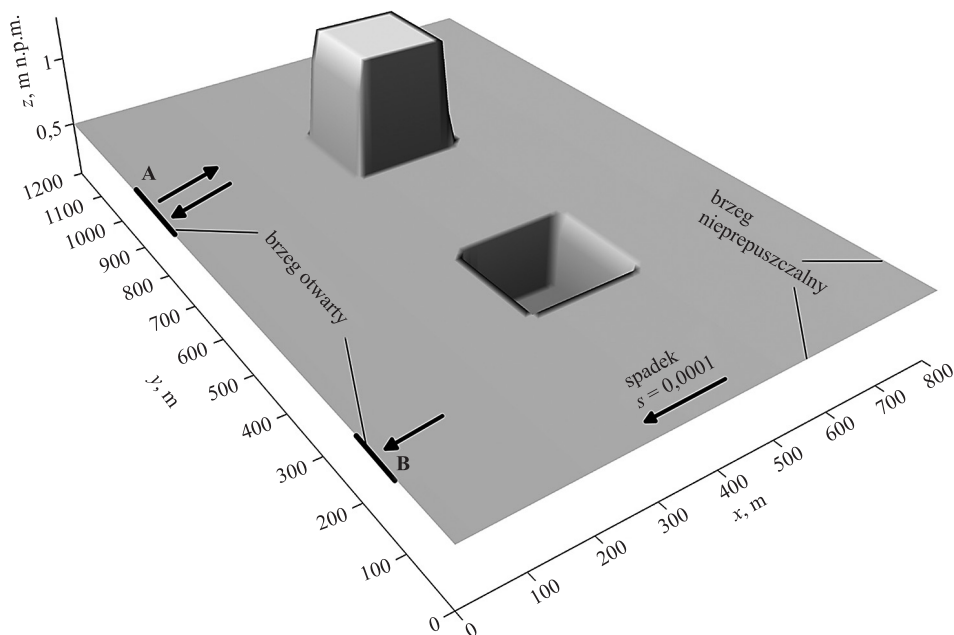
Wybór danej wartości parametru wagowego  $\theta$ , tak jak w przypadku parametru  $\omega$ , jest równoważny z zastosowaniem odpowiedniej metody numerycznego rozwiązania. W przypadku przyjęcia np. wartości  $\theta = 1/2$  otrzymujemy niejawną schemat trapezowy, natomiast dla  $\theta = 1$  uzyskany schemat jest zgodny z niejawnym schematem Eulera [Szymkiewicz 2010]. Należy zaznaczyć, że dobór odpowiedniej wartości parametru wagowego w zaprezentowanym schemacie numerycznym wpływa także na stabilność procesu rozwiązania oraz dokładność uzyskanego wyniku. W przypadku parametru wagowego  $\theta$  można wykazać, że dla wartości  $\theta > 0,5$  zastosowany schemat będzie generował w rozwiązaniu błąd dyfuzji numerycznej, powodując tym samym nadmierne wygładzenie uzyskanego rozwiązania. Przy stałym kroku czasowym dyfuzja numeryczna jest tym większa, im większa będzie wartość parametru  $\theta$ . Drugi parametr wagowy  $\omega$  związany jest z modyfikacją metody elementów skończonych. Przyjęcie wartości  $\omega > 0,5$  pozwala na wyeliminowanie niestabilności rozwiązania, która objawia się w postaci niefizycznych oscylacji typu „ $2\Delta x$ ” związanych z przestrzenną dyskretyzacją. Możliwość ta ma szczególne znaczenie w przypadku uzyskania poprawnego rozwiązania w pobliżu przeszkód i zagłębień terenowych charakteryzujących się dużymi zmianami wartości rzędnych dna.

## PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

W przykładzie obliczeniowym rozważa się propagację hipotetycznej fali wezbraniowej na założonym terenie zalewowym będącym jednocześnie polderem sterowanym. Obszar polderu o wymiarach  $800 \text{ m} \times 1200 \text{ m}$  i średnim spadku  $s = 0,0001$  w kierunku  $x$  obejmuje wzniesienie oraz zagłębienie terenowe (ryc. 3). Na obszar polderu woda może wpływać z przyległego koryta rzecznoego lub odpływać z niego poprzez dwa fragmenty (odcinek A i B) wału przeciwpowodziowego o długości  $100 \text{ m}$  każdy. Na całym terenie zalewowym przyjęto stałą wartość współczynnika szorstkości według Manninga  $n = 0,04 \text{ s} \cdot \text{m}^{1/3}$  oraz jednorodny grunt o znanych parametrach infiltracyjnych: począt-



kowym natężeniu infiltracji  $f_o = 2 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$ , maksymalnym natężeniu infiltracji w stanie nasycenia  $f_c = 0,7 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$  oraz stałej zanikania  $k = 2 \text{ h}^{-1}$ . Podczas symulacji rozpatrywano pracę polderu, w której można wyróżnić fazę napływu wody na obszar polderu oraz fazę odpływu z tego polderu. Faza napływu występuje podczas narastania fali wezbraniowej w przyległym korycie rzeczonym, natomiast faza odpływu wody z polderu rozpoczyna się po przejściu tej fali.

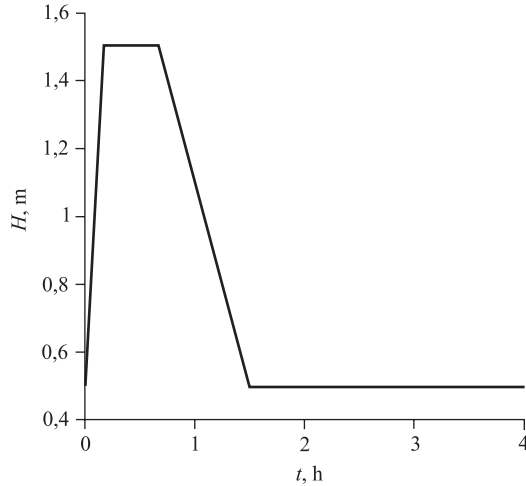


Ryc. 3. Geometria polderu wraz z lokalizacją brzegu otwartego przez który następuje napływ (odcinek A) oraz odpływ (odcinek A i B)

Fig. 3. The geometry of the detention basin, where section A denotes the permeable boundary through which the inflow occurs, outflow occurs through A and B sections

Przyjęto, że w czasie  $t = 0$  rozpatrywany obszar nie jest pokryty wodą, czyli początkowa wartość rzędnej zwierciadła wody odpowiada rzędnej dna ( $H_0(x, y, t = 0) = Z(x, y)$ ). Na otwartym brzegu, gdzie następuje napływ wody z przyległego koryta na teren polderu (odcinek A na ryc. 3), jako warunek brzegowy zadano funkcję w postaci rzędnej zwierciadła wody  $H(t)$ , której przebieg przedstawiono na ryc. 4.

Po przejściu fali wezbraniowej w korycie rzeki (po przyjętym czasie  $t_s = 1,5 \text{ h}$ ) zostaje gwałtownie otwarte zamknięcie na odcinku B (ryc. 3), wówczas następuje odpływ wody z polderu poprzez ten fragment brzegu. Ponadto, jeśli poziom wody na terenie zalewowym będzie wyższy niż na odcinku A brzegu otwartego, to odpływ będzie odbywał się także przez ten fragment brzegu. Na pozostałych częściach brzegu obszaru zadano warunek nieprzepuszczalności w formie zerowego strumienia funkcji  $H$ . Obszar rozwiązania został pokryty prostokątną siatką elementów skończonych o wymiarach  $\Delta x = 10 \text{ m} \times \Delta y = 10 \text{ m}$ , w której liczba węzłów siatki wynosi 9801. Obliczenia przeprowadzono z krokiem czasowym  $\Delta t = 10 \text{ s}$ , przyjmując jednocześnie wartości parametrów wagowych



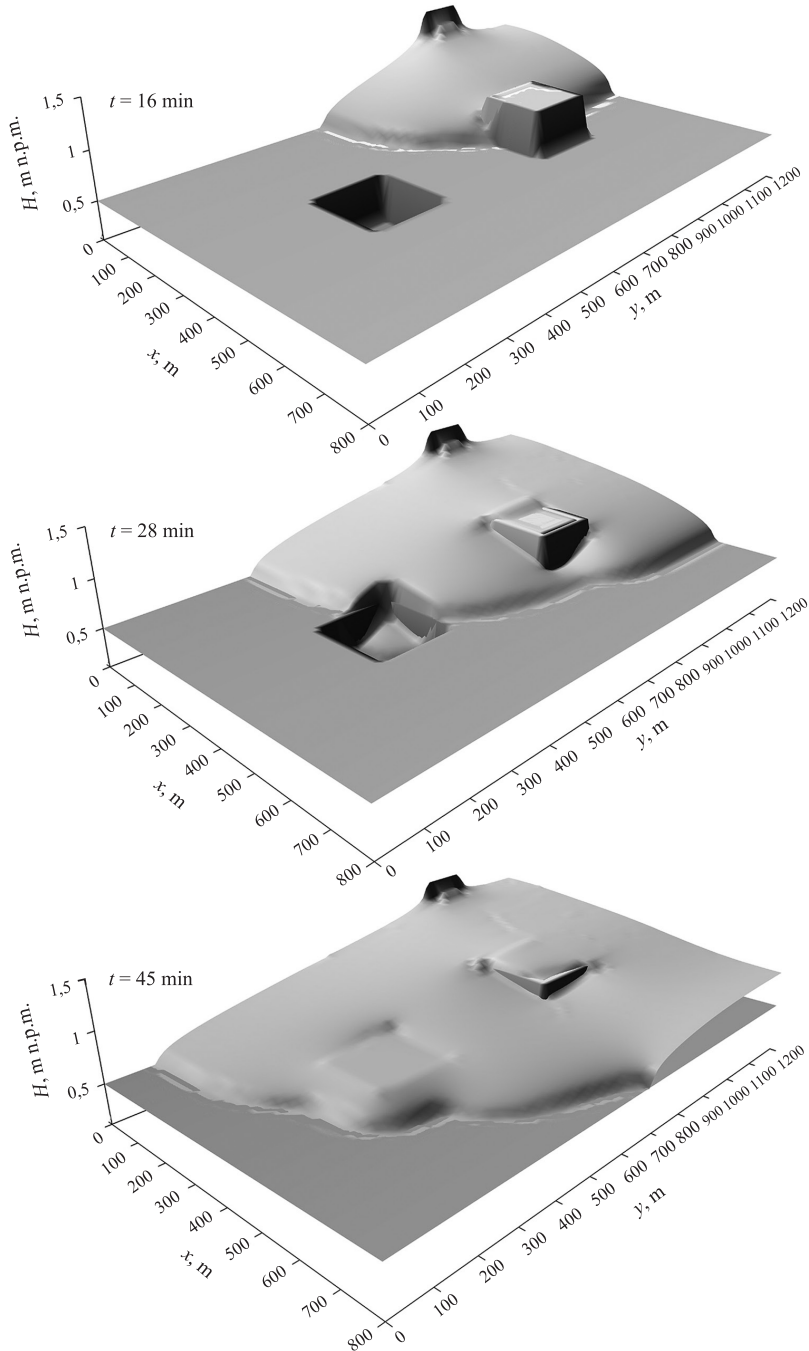
Ryc. 4. Przebieg funkcji, w postaci rzędnej zwierciadła wody  $H(t)$ , zadanej jako warunek brzegowy otwarty na odcinku A brzegu obszaru

Fig. 4. The plot of the function denoting the water stage level  $H(t)$  imposed as the boundary condition at the section A

$\theta = 0,65$  i  $\omega = 0,7$ . Taki dobór wartości parametrów numerycznych w rozpatrywanym przykładzie obliczeniowym pozwolił na otrzymanie satysfakcjonującego rozwiązania pozbawionego niefizycznych oscylacji przy minimalnym wpływie dyfuzji numerycznej powodującej nadmierne wygładzenie rozwiązania.

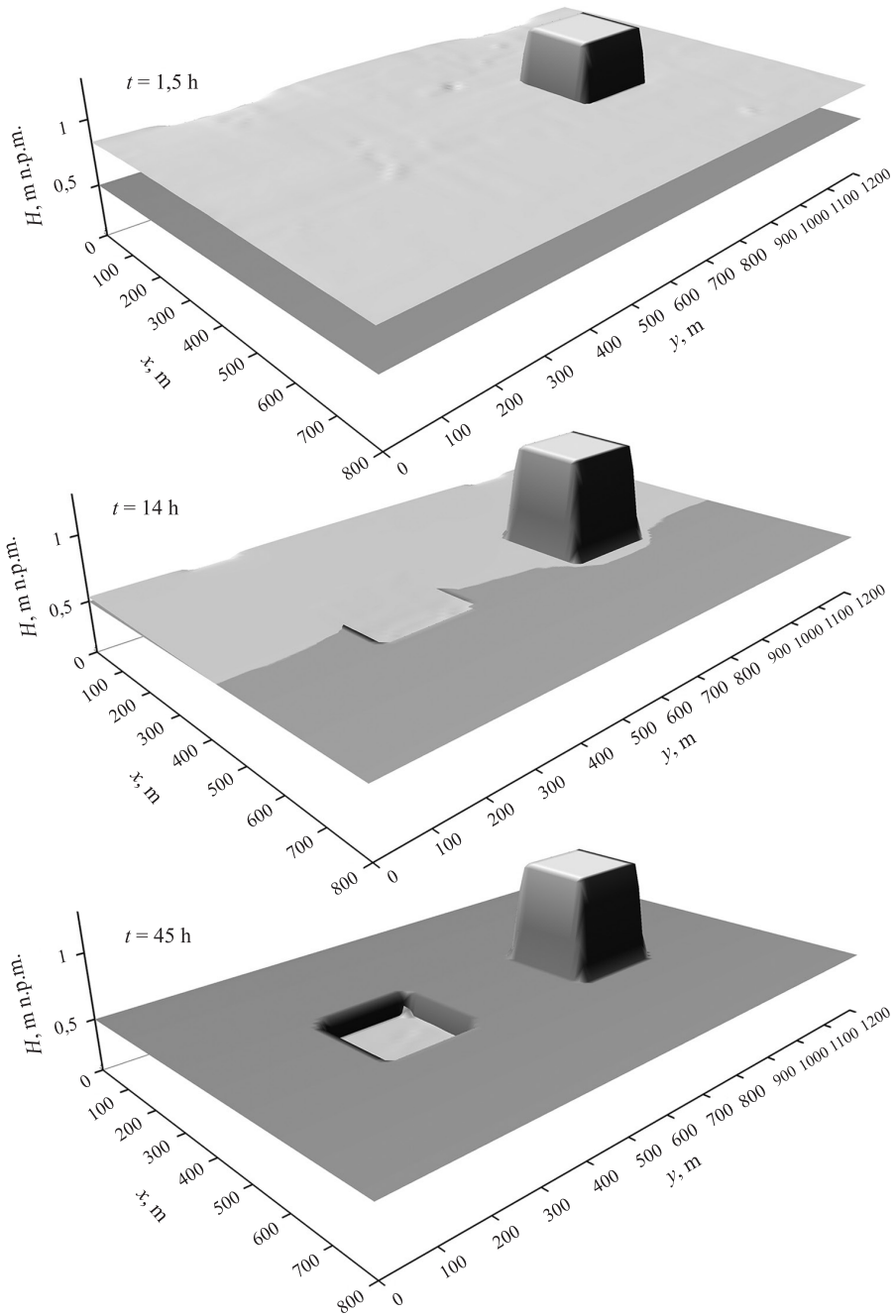
Na rysunku 5 oraz 6 przedstawiono obliczony układ zwierciadła wody w wybranych krokach czasowych. W wyniku założonych warunków brzegowych oraz układu dna podczas fazy napływu na teren zalewowy (ryc. 5), front fali wezbraniowej propaguje po suchym dnie. Fala dociera najpierw do wzniesienia (czas  $t = 16$  min), a następnie do zagłębienia terenowego (czas  $t = 28$  min), które zostaje całkowicie napełnione wodą (czas  $t = 45$  min). Po czasie  $t = 1,5$  h polder jest wypełniony wodą do poziomu ok.  $H = 0,9$  m. W tym czasie następuje faza odpływu z polderu (ryc. 6). Odpływ odbywa się zarówno poprzez odcinek A brzegu otwartego, jak i przez odcinek B. Część odpływającej z polderu wody jest retencjonowana w zagłębieniu (czas  $t = 14$  h).

Uwzględnienie w modelu procesu infiltracji powoduje, że woda jest w wyniku infiltracji systematycznie odprowadzana z zagłębienia terenowego (ryc. 6 dla czasu  $t = 45$  h oraz ryc. 7a). Jeśli natomiast podczas symulacji proces infiltracji zostanie pominięty ( $f(t) = 0$ ), to wówczas zagłębienie terenowe pozostanie wypełnione wodą (ryc. 7b). Ponadto, w przypadku pominięcia infiltracji, odpływ z polderu i tym samym zmniejszenie zasięgu zalewu przebiega w znacznie wolniejszym tempie, niż ma to miejsce, gdy woda infiltruje do gruntu.



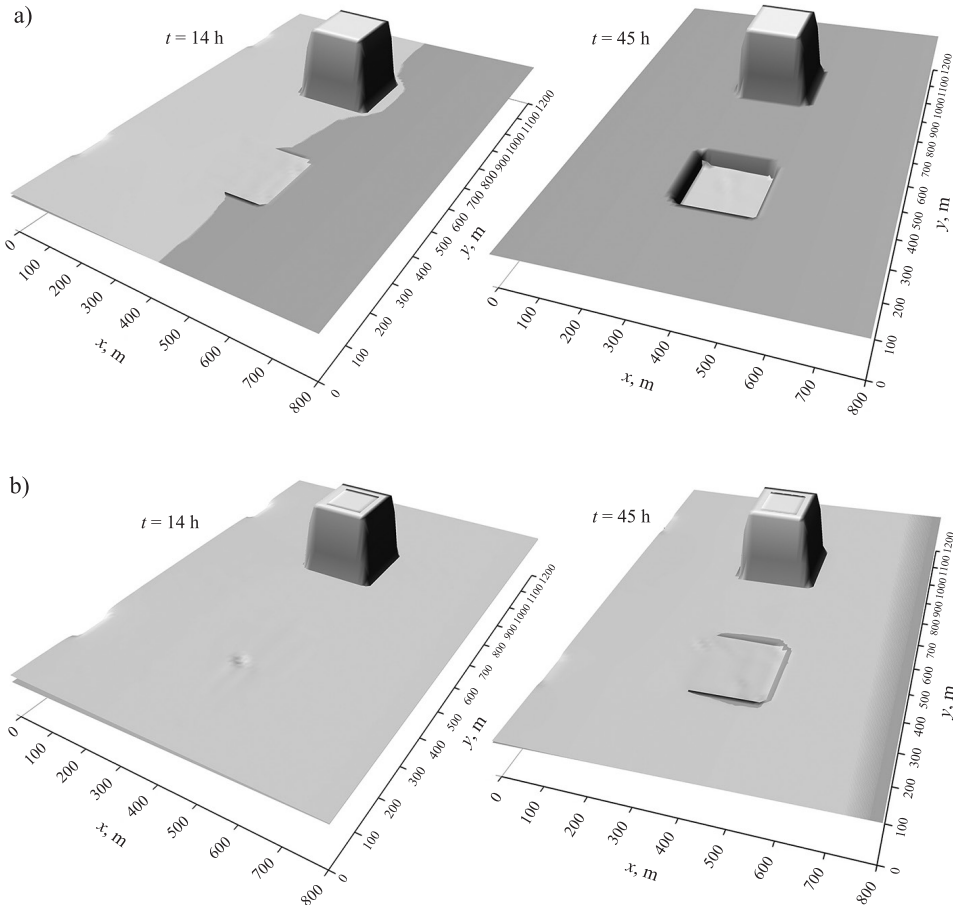
Ryc. 5. Układ zwierciadła wody oraz zasięg zalewu podczas napływu na polder po czasie  $t = 16$  min,  $t = 28$  min,  $t = 45$  min

Fig. 5. Water surface level in the detention basin at times  $t = 16$  min,  $t = 28$  min,  $t = 45$  min



Ryc. 6. Układ zwierciadła wody oraz zasięg zalewu podczas odpływu z polderu po czasie  $t = 1,5 \text{ h}$ ,  $t = 14 \text{ h}$ ,  $t = 45 \text{ h}$

Fig. 6. Water surface level in the detention basin at times  $t = 1,5 \text{ h}$ ,  $t = 14 \text{ h}$ ,  $t = 45 \text{ h}$



Ryc. 7. Porównanie zasięgu zalewu podczas odpływu z polderu po czasie  $t = 14$  h oraz  $t = 45$  h, (a) z uwzględnieniem infiltracji ( $f(t) > 0$ ), (b) bez uwzględnienia infiltracji ( $f(t) = 0$ )

Fig. 7. Comparison of the flooding reach during the outflow from the detention basin at times  $t = 14$  h and  $t = 45$  h, (a) including infiltration process ( $f(t) > 0$ ), (b) without including infiltration process ( $f(t) = 0$ )

## PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono możliwość wykorzystania dwuwymiarowego równania fali dyfuzyjnej uwzględniającego proces infiltracji jako modelu propagacji fali wezbraniowej na terenie zalewowym. Model tego typu pozwala na przeprowadzenie numerycznych obliczeń bez konieczności rozróżnienia umiejscowienia aktualnej granicy rozdzielającej teren suchy od pokrytego warstwą wody. Zmienna w czasie granica, związana z przemieszczającym się frontem fali, otrzymywana jest jako rezultat numerycznego rozwiązania równania fali dyfuzyjnej. Do rozwiązania tego równania wykorzystano technikę dekompozycji kierunkowej oraz dekompozycję względem procesów

fizycznych. Pozwoliło to na istotne uproszczenie procesu numerycznego rozwiązania równania fali dyfuzyjnej. Uzyskany układ równań jednowymiarowych rozwiązano za pomocą zmodyfikowanej metody elementów skończonych w połączeniu ze schematem dwupoziomowym. Zastosowana metoda dyskretyzacji doprowadziła do uogólnionego algorytmu z dwoma parametrami wagowymi  $\omega$  oraz  $\theta$ , których wartości decydują o dokładności i stabilności uzyskanego rozwiązania. Wybór odpowiednich wartości tych parametrów pozwala na wyeliminowanie niefizycznych oscylacji, przy jednoczesnym utrzymaniu odpowiedniej dokładności rozwiązania poprzez zminimalizowanie wpływu dyfuzji numerycznej. Przedstawiony w pracy sposób rozwiązania dwuwymiarowego równania fali dyfuzyjnej daje poprawne i dokładne rozwiązania dla szerokiego zakresu analizowanych przepływów nieustalonych na terenie zalewowym o dowolnej batymetrii.

## PIŚMIENNICTWO

- Bates, P.D., Horrit, M.S., Fewtrell, T.J. (2010). A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two-dimensional flood inundation modelling. *J. Hydrol.*, 387, 33–45.
- Chow, V.T., Maidment, D.R., Mays, L.W. (1988). *Applied hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- Cunge, J.A. (1975). Two-dimensional modeling of flood plains. [W:] K. Mahmood, V. Yevjevich (red.). *Unsteady flow in open channels*. T. II. Water Resources Publications, Fort Collins (Colorado), 705–762.
- Di Giammarco, P., Todini, E., Lamberti, P. (1996). A conservative finite elements approach to overland flow: the control volume finite element formulation. *J. Hydrol.*, 175, 267–291.
- Esteves, M., Faucher, X., Galle, S., Vauclin, M. (2000). Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain: numerical results versus observed values. *J. Hydrol.*, 228, 265–285.
- Gąsiorowski, D. (2011). Solution of the dike-break problem using finite volume method and splitting technique. *TASK Quarterly*, 15(3–4), 251–270.
- Gąsiorowski, D. (2013). Analysis of floodplain inundation using 2D nonlinear diffusive wave equation solved with splitting technique. *Acta Geophys.*, 61(3), 668–689.
- Gąsiorowski, D. (2014). Impact of diffusion coefficient averaging on solution accuracy of the 2D nonlinear diffusive wave equation for floodplain inundation. *J. Hydrol.*, 517, 923–935.
- Heniche, M.Y., Secretan, P., Boudreau, Leclerc, M. (2000). A two-dimensional finite drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries. *Advanc. Water Resour.*, 23, 359–372.
- Horritt, M.S. (2002). Evaluating wetting and drying algorithms for finite element models of shallow water flow. *Intern. J. Numer. Methods Engin.*, 55, 835–851.
- Hromadka, T.V., Yen, C.C. (1986). A diffusion hydrodynamic model (DHM). *Advanc. Water Resour.*, 9, 118–170.
- Lal, A.M.W. (1998). Performance comparison of overland flow algorithms. *J. Hydr. Engin.*, 124(4), 342–349.
- Liang, Q., Borthwick, A.G.L. (2009). Adaptive quadtree simulation of shallow flow with wet-dry fronts over complex topography. *Comput. Fluids*, 38, 221–234.
- Liu, Q.Q., Chen, L., Li, J.C., Singh, V.P. (2004). Two-dimensional kinematic wave model of overland-flow. *J. Hydrol.*, 291, 28–41.
- Moussa, R., Bocquillon, C. (2009). On the use of the diffusive wave for modeling extreme flood events with overbank flow in the floodplain. *J. Hydrol.*, 374, 116–135.
- Prestininzi, P. (2008). Suitability of the diffusive model for dam break simulation application to a CADAM experiment. *J. Hydrol.*, 361, 172–185.

- Szydłowski, M., Magnuszewski, A. (2007). Free surface flow modeling in numerical estimation of flood risk zones: a case study. *TASK Quarterly*, 11(4), 301–313.
- Szymkiewicz, R. (1993). Oscillation-Free Solution of Shallow Water Equations for Nonstaggered Grid. *J. Hydr. Engin.*, 119(10), 1118–1137.
- Szymkiewicz, R. (2010). Numerical modeling in open channel hydraulics. Springer, Dordrecht.
- Szymkiewicz, R., Gąsiorowski, D. (2012). Simulation of unsteady flow over floodplain using the diffusive wave equation and the modified finite element. *J. Hydrol.*, 464–465, 165–167.

## MODELING OF UNSTEADY FLOW OVER FLOODPLAIN USING TWO-DIMENSIONAL DIFFUSIVE WAVE EQUATION

**Abstract.** The phenomenon of floodplain inundation can be modeled using the shallow water equations. Since during the inflow phase the area is initially dry, the shallow water equations must be solved in a domain with variable geometry. As a result, the solution domain is bounded by propagating wave front that separates dry and wet areas. In this case, very small depths occurring at this front give high velocities, which can then lead to negative values of depths and numerical instability. The above problems resulting from the application of the shallow water equations for simulation of the flow over floodplain can be avoided by using the simplified diffusive wave model. During the flood wave propagation over floodplain, the part of water volume can infiltrate into the soil. In the work it is assumed that the infiltration process is described by the Horton equation, which is coupled with a diffusive wave equation by source term. In order to solve the two-dimensional diffusive wave equation the splitting methods with regard to the directions and physical processes are applied, whereas a modified finite element method is used for spatial discretization. This approach leads to an efficient and stable numerical algorithm, which also ensures an adequate accuracy required during simulation of floodplain inundation.

**Key words:** diffusive wave equation, unsteady surface flow, floodplain inundation, infiltration, finite element method

*Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 1.12.2016*

Do cytowań – For citation: Gąsiorowski, D., Artichowicz, W. (2016). Modelowanie przepływów nieustalonych na terenach zalewowych z wykorzystaniem dwuwymiarowego równania fali dyfuzyjnej. *Acta. Sci. Pol., Formatio Circumiectus*, 15(4), 193–207.