

ZASTOSOWANIE ESTYMACJI JĄDROWEJ W BADANIU ROZKŁADU MINIMALNYCH POZIOMÓW WÓD PODZIEMNYCH

Maciej Karczewski

Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu, Polska

ABSTRAKT

Cel pracy

Susza stanowi jedno z najpoważniejszych wyzwań środowiskowych współczesności, znacząco wpływając na dostępność wód podziemnych – kluczowego zasobu w gospodarce wodnej. Celem pracy jest wykazanie skuteczności estymatorów jądrowych w określaniu rozkładu minimalnych poziomów wód podziemnych.

Materiał i metody

W badaniu przeanalizowano rozkłady minimalnych poziomów wód podziemnych na obszarze Wielkopolski, regionu szczególnie narażonego na niedobory wody, w okresie hydrologicznym lat 2001–2020. Dane pochodzące z 50 stacji pomiarowych posłużyły do porównania skuteczności klasycznych metod parametrycznych oraz estymacji jądrowej zaproponowanych przez autora. Zastosowano również trzy odrębne miary błędu.

Wyniki i wnioski

Wyniki świadczą o tym, że estymacja jądrowa przewyższa metody parametryczne pod względem dokładności w przypadku studni głębszych o zwierciadle napiętym. Dla zwierciadeł swobodnych badania nie wykazały jednoznacznej przewagi żadnej z metod. Uzyskane wyniki mogą przyczynić się do doskonalenia metod prognozowania ekstremalnych poziomów wód podziemnych oraz wspierać zarządzanie zasobami wodnymi w kontekście rosnącego ryzyka suszy.

Słowa kluczowe: hydrogeologia, wody podziemne, susza, nieparametryczne, estymacja jądrowa

WPROWADZENIE

W ostatnich latach problem suszy w Polsce stał się jednym z kluczowych wyzwań związanych z zarządzaniem zasobami wodnymi, mającym daleko idące konsekwencje dla rolnictwa (Stachowski and Markiewicz, 2011; Łabędzki, 2016; Rolbiecki i in., 2023; Marcinkowski i in., 2024), gospodarki wodnej (Łabędzki, 2016; Kiryluk, 2019; Karczewski i in., 2022; Rudnicki i Wiśniewski, 2022; Kaznowska i in., 2024) oraz środowiska naturalnego (Lake, 2003; Mosley, 2015; Kubicz i in., 2021; Trenberth i in., 2014; Vicente-Serrano i in., 2020). Susza, będąca efektem zarówno natural-

nych zjawisk klimatycznych, jak i potencjalnych antropogenicznych zmian klimatu, prowadzi do znacznego zmniejszenia dostępności wody (Mishra i Singh, 2010; Dai, 2011; Conway, 2013; Kubicz i in., 2019), co jest szczególnie widoczne w regionach takich jak Wielkopolska (Szwed i in., 2010; Napiórkowski i in., 2013; Marcinkowski i in., 2017; Ziernicka-Wojtaszek i Kopcińska, 2020). Region ten, będący jednym z głównych ośrodków produkcji rolnej w Polsce, jest szczególnie narażony na skutki suszy z uwagi na swoją specyficzną sytuację hydrologiczną, charakteryzującą się relatywnie niskimi opadami atmosferycznymi i ujemnym klimatycznym bilansem wodnym (Marcin-

✉ e-mail: maciej.karczewski@upwr.edu.pl

kowski i in., 2017; Nowak i Ptak, 2018; Kubicz, 2019; Ziernicka-Wojtaszek, 2021; R. Kalbarczyk i E. Kalbarczyk, 2022).

Skutki suszy w Wielkopolsce obejmują nie tylko zmniejszenie plonów i degradację gleb, ale również istotne zmniejszenie zasobów wód podziemnych, które są źródłem zaopatrzenia w wodę zarówno dla rolnictwa, jak i dla ludności (Okruszko i in., 2024). Ryzyko obniżającego się poziomu wód podziemnych staje się zatem jednym z głównych problemów, który wymaga pilnych działań zarówno w zakresie monitorowania, jak i zarządzania tymi zasobami (Bloomfield i Marchant, 2013; Taylor i in., 2013; Van Loon, 2015; Bloomfield i in., 2019).

Monitorowanie poziomu wód podziemnych w regionach szczególnie narażonych na suszę, takich jak Wielkopolska, jest niezbędne dla zrozumienia i przewidywania zmian w dostępności wody. Regularne pomiary i analiza danych hydrogeologicznych pozwalają na ocenę bieżącej sytuacji oraz na tworzenie modeli prognostycznych, które mogą wspierać decyzje dotyczące zarządzania zasobami wodnymi, takie jak wspomaganie nawadniania czy kontrolę zanieczyszczenia wód podziemnych (Durkowski i Jarnuszewski, 2016). Tego typu monitoring umożliwia identyfikację obszarów o krytycznie niskim poziomie wód podziemnych oraz ocenę ryzyka dalszego pogłębiania się suszy.

Jednak same dane pomiarowe nie są wystarczające, aby skutecznie zarządzać zasobami wodnymi w warunkach zmieniającego się klimatu. Konieczne jest zastosowanie zaawansowanych metod statystycznych, które umożliwiają lepsze zrozumienie dynamiki zmian poziomu wód podziemnych dla oceny ryzyka stanów determinujących suszę (Kajewska-Szkudlarek i in., 2022). W tym kontekście istotnym narzędziem jest oszacowanie rozkładów prawdopodobieństwa, które pozwala na modelowanie oraz predykcję zmian poziomu wód podziemnych (Loáiciga, 2015).

Estymacja rozkładów prawdopodobieństwa stanowi jeden z kluczowych elementów analizy ryzyka hydrogeologicznego, umożliwiając precyzyjne modelowanie niepewności związanej z przyszłymi zmianami poziomu wód podziemnych. Dzięki zastosowaniu różnych metod statystycznych, w tym estymacji jądrowej, możliwe jest tworzenie rozkładów, które odzwierciedlają prawdopodobieństwo wystąpienia określonych

poziomów wód podziemnych w przyszłości, co jest bardzo istotne w kontekście planowania działań adaptacyjnych. Przykłady zastosowań metod statystycznych obejmują prognozowanie ryzyka wystąpienia suszy hydrologicznej, ocenę skuteczności różnych strategii zarządzania zasobami wodnymi, a także optymalizację działań w zakresie nawadniania i gospodarki wodnej (Janga Reddy i Ganguli, 2012; Zeng i in., 2012; Loáiciga, 2015; Kozłowski i in., 2019; Dastourani i Nazeri Tahroudi, 2022).

W obliczu rosnącego ryzyka suszy szerokie zastosowanie różnych metod analizy danych staje się niezbędne. Szacowanie rozkładów prawdopodobieństwa oraz ocena kwantyli tych rozkładów jako narzędzie analizy statystycznej pozwalają na ocenę ryzyka wystąpienia suszy.

W pracy przedstawiono zastosowanie alternatywnej do klasycznych rozkładów stosowanych w hydrogeologii metodę w postaci nieparametrycznych estymatorów jądrowych (Karczewski i Michalski, 2018a i b; Michalski, 2016). Dokonano również weryfikacji metody, porównując ją z klasycznymi metodami opartymi na rozkładach prawdopodobieństwa.

METODYKA

Obszar badany i dane

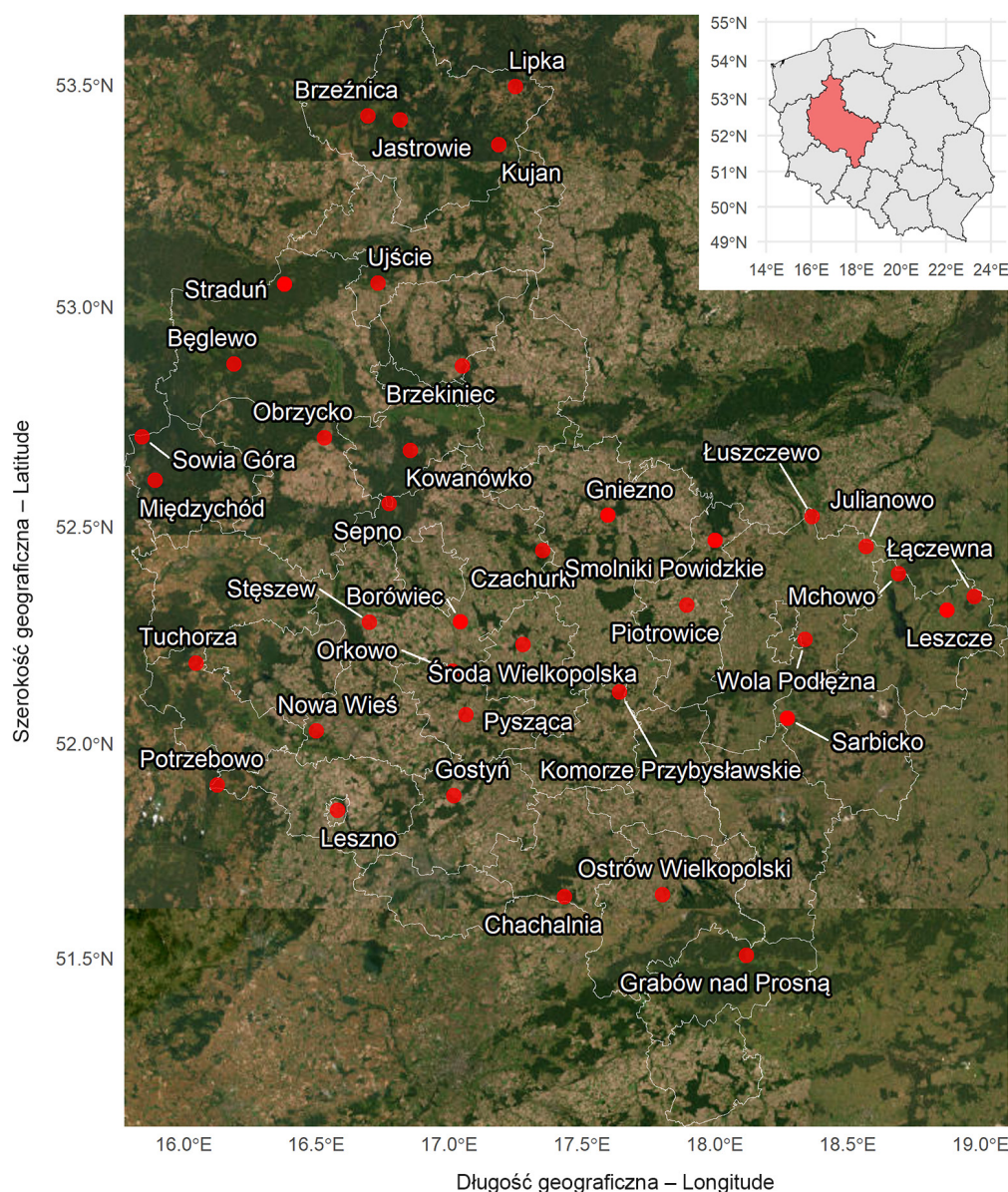
Badania przeprowadzono w 50 stacjach pomiarowych zlokalizowanych na terenie województwa wielkopolskiego. Obszar ten rozciąga się na obszarze o współrzędnych od 51°02'N do 53°30'N szerokości geograficznej północnej oraz od 15°50'E do 19°19'E długości geograficznej wschodniej.

Wody podziemne na obszarze badań związane są z osadami czwartorzędowymi. Występują w warstwach piasków i żwirów, a także w wodonośnych warstwach węglanowych i piaskowcach (Dragon i Gorski, 2015; Nowicki i Sadurski, 2010).

Dla celów tego artykułu przeanalizowano jeden z parametrów hydrometrycznych, czyli poziom wód podziemnych. Wykorzystano pomiary poziomu zwierciadła wód podziemnych z lat 2001–2020, które zostały pozyskane z bazy danych Państwowego Instytutu Geologicznego. Z uwagi na to, że stany minimalne najczęściej obserwowano na tym obszarze w okresie między majem a październikiem, analiza została ograniczona do tego okresu.

Pomiary przeprowadzono na następujących punktach pomiarowych: Bęglewo, Borówiec (3 stacje), Brzekiniec, Brzeźnica, Chachalnia, Czachurki, Gniezno, Gostyń, Grabów nad Prosną, Jastrowie, Julianowo, Komorze Przybysławskie, Kowanówko, Kujan, Łączewna, Leszcze (3 stacje), Leszno, Lipka, Łuszczewo,

Mchowo, Międzychód, Nowa Wieś, Obrzycko, Orkowo, Ostrów Wielkopolski, Piotrowice, Potrzebowo, Pysząca, Sarbicko (5 stacji), Sepno, Smolniki Powidzkie (2 stacje), Sowia Góra, Środa Wielkopolska, Stęszew, Straduń (3 stacje), Tuchorza, Ujście, Wola Podłęzna. Stacje zostały przedstawione na rycinie 1.



Ryc. 1. Obszar województwa wielkopolskiego wraz z oznaczonymi stacjami pomiarowymi (źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem danych GADM, <https://gadm.org>, oraz map, <https://doc.arcgis.com/en/arcgis-online>)

Fig. 1. The area of Greater Poland Voivodeship with marked monitoring stations (source: Authors' own elaboration using GADM data, <https://gadm.org>, and maps, <https://doc.arcgis.com/en/arcgis-online>)

Informacje o stacjach, ich lokalizacja oraz podstawowa charakterystyka znajdują się w załączniku 1.

Dla każdej stacji wyznaczone zostały miesięczne minima poziomów zwierciadła wód podziemnych. Następnie dla wybranych estymatorów jądrowych oraz rozkładów parametrycznych zostało obliczone dopasowanie do danych, na podstawie którego wybrano najbardziej efektywny estymator. Jednym z rezultatów opracowania może być obliczenie wartości kwantyli. Wartości te będą przydatne dla praktyków w ocenie suszy hydrogeologicznej, niżówki hydrogeologicznej, niedoborów podziemnych. W pracy poglądowo zostały wykonane obliczenia kwantyli dla trzech wartości prawdopodobieństw (0,9; 0,95; 0,99).

Istotną cechą każdej stacji jest typ systemu wodonośnego, który został podzielony na trzy kategorie (Kowalczyk i in., 2016):

- typ A: studnie o zwierciadle swobodnym lub posiadającym niewielkie ciśnienie piezometryczne;
- typ B: studnie o zwierciadle napiętym;
- typ C: studnie o zwierciadle napiętym o dużej głębokości, w których strop warstwy wodonośnej znajduje się poniżej 120 m.

Wśród badanych studni 36 było typu A, 9 typu B i 5 typu C.

Estymatory jądrowe i metody parametryczne

W celu oceny efektywności dopasowania dokonano porównania estymatorów nieparametrycznych z klasycznymi parametrycznymi rozkładami wykorzystywanymi w hydrogeologii: log-normalnym, Weibulla, gamma oraz beta.

Proponowana metoda oszacowania rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X – miesięcznych minimalnych poziomów wód podziemnych, opiera się na zastosowaniu nieparametrycznych estymatorów jądrowych (KDE – *Kernel Density Estimator*). Estymatorem jądrowym jest funkcja gęstości dla próby $X_1, X_2, \dots, X_n$ o postaci:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

gdzie

h – parametr wygładzania,

K – funkcja jądra estymatora $\hat{f}_n$.

Szczegółowy opis został przedstawiony w pracach (Karczewski i Michalski, 2018a i b). Przy selekcji KDE wybór odpowiedniej funkcji jądra oraz metody szukania optymalnego parametru wygładzania jest kluczowym krokiem przy konstrukcji dobrego estymatora.

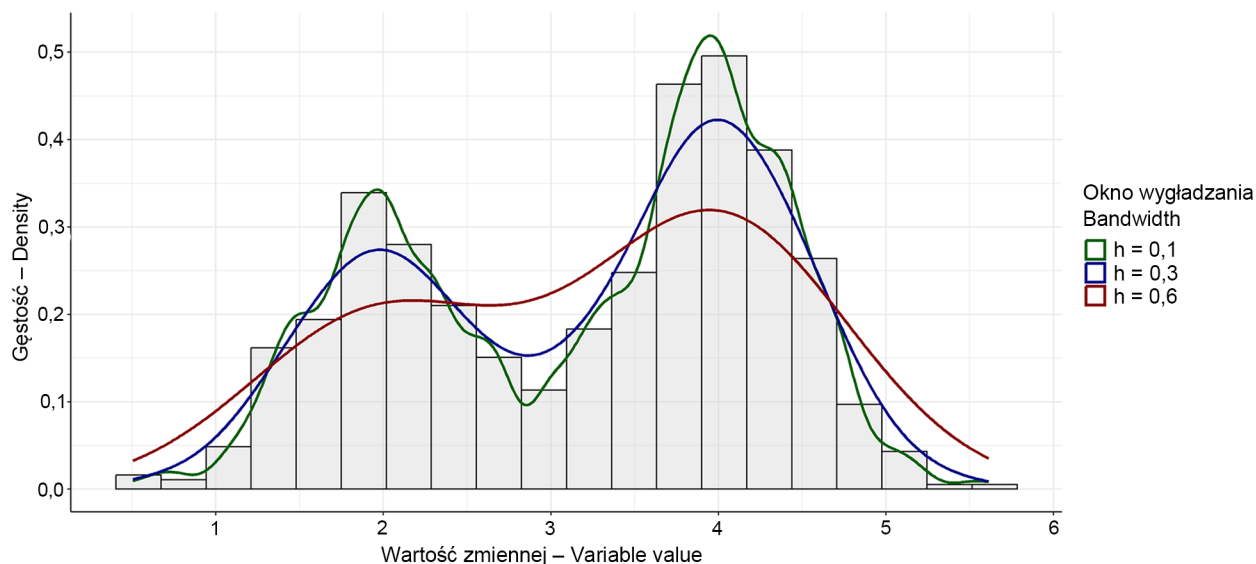
Parametr wygładzania opisuje, jak szeroki powinien być zakres obserwacji pojedynczego jądra. Niskie wartości mogą doprowadzić do dużego szumu statystycznego i skoków losowych, natomiast zbyt duża wartość może wygładzić funkcję, zbyt bardzo zmieniając istotne charakterystyki rozkładu. Rycina 2 przedstawia trzy różne warianty wygładzania na przykładowych bimodalnych danych.

Jądro rozkładu opisuje kształt funkcji prawdopodobieństwa. W zależności od charakteru rozkładu selekcja jądra symetrycznego bądź asymetrycznego może być kluczowa przy wyborze najefektywniejszego estymatora. Rycina 3 prezentuje przykładowe estymatory o jądrach Gaussowskim i log-normalnym na danych prawostronnie skośnych.

W pracy zastosowano pięć estymatorów: estymator Silvermanna z jądrem Gaussowskim (SilvG), estymator Sheatera–Jonesa z jądrem Gaussowskim (SJg), nieobciążony estymator cross-validation z jądrem Gaussowskim (CVg), estymator cross-validation z jądrem log-normalnym (CVlog) oraz estymator plug-in z jądrem log-normalnym (Plog).

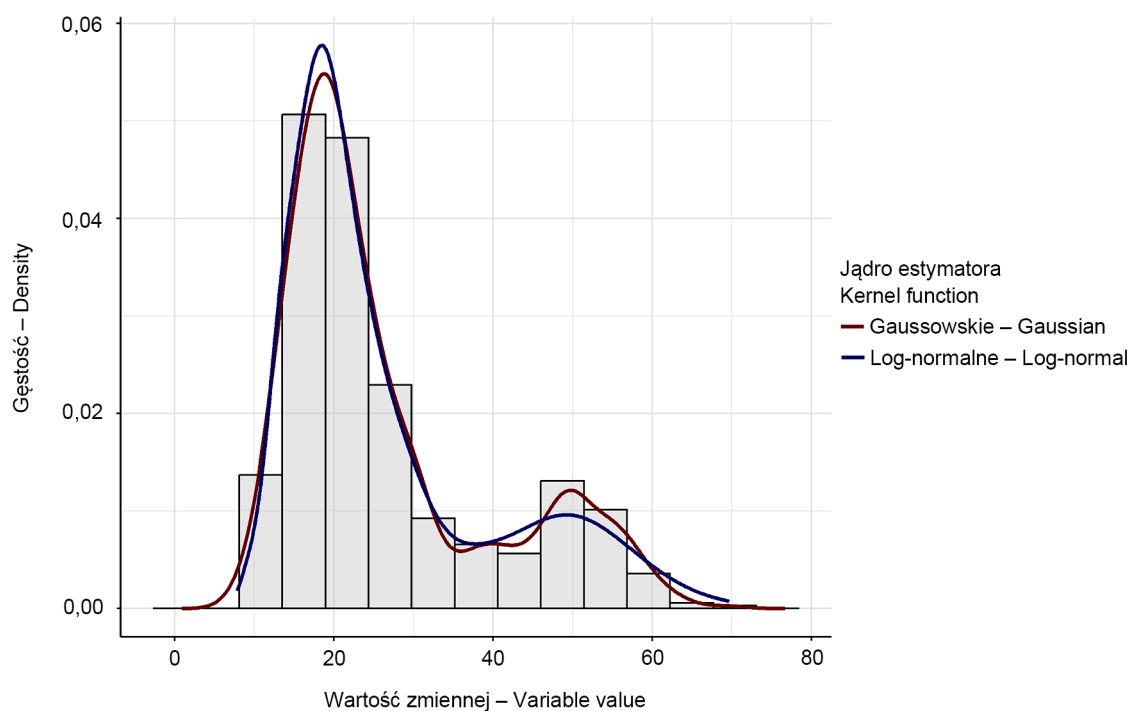
Ocenę dopasowania wykonano przy pomocy następujących miar: średniego błędu bezwzględnego MAE (*Mean Absolute Error*), średniego błędu kwadratowego RMSE (*Root Mean Squared Error*) (Hodson, 2022), oraz miary Kullbacka–Leiblera KLd (*Kullback–Leibler divergence*) (Mizuki i Kuzuha, 2023). Każda z tych miar dopasowania bada stopień podobieństwa estymatora ($\hat{f}$) do nieznanego empirycznego rozkładu prawdopodobieństwa opisanego przez dane doświadczalne (f). Porównanie różnic w wynikach miar dopasowania zostanie opisane poniżej.

Do obliczeń numerycznych zastosowano środowisko R (wersja 4.3.1, R Core Team, 2023).



Ryc. 2. Porównanie dopasowania dla różnych wartości okna wygładzania h (źródło: opracowanie własne)

Fig. 2. Comparison of fit for various smoothing parameter h values (source: Authors' own elaboration)



Ryc. 3. Porównanie dopasowania przy zastosowaniu jądra normalnego (czerwony) i log-normalnego (niebieski) na przykładowych danych prawostronnie skośnych (źródło: opracowanie własne)

Fig. 3. Comparison of fit using normal (red) and log-normal (blue) kernels on exemplary right-skewed data (source: Authors' own elaboration)

WYNIKI I DISKUSJA

Tabela 1 przedstawia najefektywniejsze estymatory dla danych stacji w sensie najniższej wartości wybranej miary błędu.

Rezultaty zależne były od dobranej miary błędu. Tabela 2 przedstawia liczbę studni, których najefektywniejszym estymatorem był estymator z rodziny parametrycznych (P) i nieparametrycznych (N).

MAE jest klasyczną miarą pozwalającą badać odległości pomiędzy predykcją estymatora a obserwowaną wartością. Liniowy sposób liczenia błędu utrzymuje wagę wszystkich wartości na tym samym poziomie, a interpretacja jest bardziej naturalna (Hodson, 2022). W studniach typu A zanotowano wyższy odsetek estymatorów nieparametrycznych (55,6% do 44,4%), w studniach typu B zanotowano wyższy odsetek estymatorów nieparametrycznych (100% do 0%), w studniach typu C zanotowano wyższy odsetek estymatorów nieparametrycznych (100% do 0%).

RMSE podobnie jak MAE pozwala badać odległości pomiędzy predykcją a empirycznymi danymi. Różni się sposobem liczenia błędu, opierającym się na kwadracie odległości. W efekcie RMSE wykaże wyższą od MAE wartość błędu w przypadku wysokich rozbieżności w predykcji (Hodson, 2022). W studniach typu A zanotowano niższy odsetek estymatorów nieparametrycznych (33,3% do 66,7%), w studniach typu B zanotowano wyższy odsetek estymatorów nieparametrycznych (80,6% do 19,4%), w studniach typu C zanotowano wyższy odsetek estymatorów nieparametrycznych (100% do 0%).

MAE różni się od RMSE jedynie sposobem liczenia samej odległości. Jego rezultatem jest zmniejszenie wagi pojedynczych wartości odstających oraz bardziej intuicyjna interpretacja (Hodson, 2022). W studniach typu A zanotowano wyższy odsetek estymatorów nieparametrycznych (55,6% do 44,4%), w studniach typu B zanotowano wyższy odsetek estymatorów nieparametrycznych (100% do 0%), w studniach typu C zanotowano wyższy odsetek estymatorów nieparametrycznych (100% do 0%).

Dywergencja Kullbacka–Leiblera stanowi bardziej całościowe spojrzenie na różnice pomiędzy dwoma rozkładami. Miara ta nie opiera się wyłącznie na błędzie predykcji, lecz ocenia cechy takie jak kształt, rozproszenie czy asymetrię funkcji gęstości (Mizuki

i Kuzuha, 2023). Bardzo często miara ta stosowana jest w Bayesowskiej hydrologii (Tang i in., 2016). Nie jest to jednak warunek konieczny i może być używana do badania różnic pomiędzy rozkładem empirycznym a estymatorem. Przy zastosowaniu tej miary do oceny błędu, estymatory jądrowe miały lepsze dopasowanie dla każdej studni.

Otrzymane wyniki wskazują na istotne znaczenie rodzaju zwierciadła wód na kształt funkcji gęstości minimalnego poziomu wód podziemnych. Studnie o zwierciadle swobodnym (typ A) charakteryzują się wysoką podatnością na warunki zewnętrzne, takie jak opady, topniejący śnieg czy infiltracja wody z rzek i jezior (Dobek, 2007; Nowicka i in., 2015). Wpływ tych czynników powoduje zmniejszenie znaczenia specyfiki hydrogeologicznej, a co za tym idzie łatwiejsze dopasowania przy użyciu klasycznych rozkładów prawdopodobieństwa (Vroblewski i in., 2007; Jędruszkiewicz i in., 2016; Rutkoviene i in., n.d.; Stanek-Tarkowska, 2022).

Studnie o zwierciadle napiętym (typ B) z racji ograniczenia warstwy wodonośnej nieprzepuszczalnymi lub niskoprzepuszczalnymi warstwami są bardziej odizolowane od wyżej wymienionych czynników, a przez to bardziej zależne od lokalnej specyfiki hydrogeologicznej. Wyróżnić tu należy: budowę geologiczną, przepuszczalność i porowatość skał, ciśnienie hydrostatyczne, spadek hydrauliczny, procesy zasilania, obecność uskoków, pojemność wodną warstwy wodonośnej oraz miąższość warstwy nieprzepuszczalnej. Dodatkowym czynnikiem pogłębiającym ten efekt jest głębokość położenia warstwy wodonośnej (typ C), gdzie znaczenie czynników zewnętrznych będzie dodatkowo zredukowane (Jędruszkiewicz i in., 2016).

Wykorzystanie różnych miar, takich jak RMSE, MAE, oraz dywergencji Kullbacka–Leiblera (KLd) umożliwia kompleksową ocenę estymatorów parametrycznych i nieparametrycznych, pozwalając na bardziej wszechstronną analizę ich skuteczności. Wyniki przedstawione w tabeli 2 wskazują, że estymatory parametryczne wykazują częstszą efektywność pod względem RMSE dla studni typu A. Natomiast w przypadku pozostałych miar, takich jak MAE i KLd, estymatory jądrowe dominują, szczególnie w typach B i C, które reprezentują zwierciadła napięte oraz głębokie zwierciadła napięte. Wyniki te sugerują, że choć estymatory parametryczne mogą być bardziej precyzyjne w odnie-

sieniu do minimalizacji błędów kwadratowych w określonych standardowych warunkach, estymatory jądrowe lepiej oddają ogólną strukturę rozkładów błędów w bardziej złożonych układach hydrogeologicznych. Tym samym mimo że estymatory jądrowe nie zawsze pozwalają osiągnąć najlepsze rezultaty we wszystkich kategoriach, ich przewaga według miar takich jak MAE i KLd świadczy o ich poprawności w opisywaniu kształtu funkcji rozkładu prawdopodobieństwa.

W celu lepszego zobrazowania potencjalnych różnic w estymacji rozkładów omówione zostaną dwa skrajne przykłady uwzględniające miary błędu RMSE i MAE. Stacja Czachurki jako stacja o typie A, której najefektywniejszym estymatorem był rozkład Weibulla, oraz Borówiec 2 jako stacja o typie B, której najefektywniejszym estymatorem był estymator jądrowy cross-validation o jądrze log-normalnym.

Tabela 1. Najefektywniejsze estymatory rozkładu minimum wód podziemnych (źródło: opracowanie własne)

Table 1. Most effective estimators of groundwater minimum distribution (source: Authors' own elaboration)

Stacja / Station	RMSE	MAE	KLd	Stacja / Station	RMSE	MAE	KLd
Borówiec 1	CVlog	CVlog	Plog	Komorze Przybysławskie	CVg	CVg	CVg
Borówiec 2	CVlog	CVlog	CVlog	Nowa Wieś	SJg	SJg	SJg
Borówiec 3	lnorm	Plog	Plog	Potrzebowo	weibull	CVlog	CVlog
Sarbicko 1	CVlog	CVlog	CVlog	Brzekiniec	weibull	weibull	SilvG
Sarbicko 2	lnorm	CVlog	Plog	Brzeźnica	gamma	SilvG	SilvG
Sarbicko 3	lnorm	CVlog	Plog	Środa Wielkopolska	SJg	Plog	SilvG
Sarbicko 4	gamma	CVlog	SilvG	Pysząca	CVlog	CVlog	Plog
Sarbicko 5	lnorm	Plog	Plog	Gostyń	CVg	CVlog	Plog
Czachurki	weibull	weibull	SilvG	Jastrowie	lnorm	CVg	SilvG
Straduń 1	CVg	CVlog	Plog	Gniezno	lnorm	Plog	Plog
Straduń 2	CVg	CVlog	SJg	Ostrów Wielkopolski	CVg	CVlog	CVlog
Straduń 3	CVg	CVlog	Plog	Kowanówko	gamma	CVlog	Plog
Sepno	weibull	CVlog	SilvG	Ujście	CVlog	CVlog	CVg
Leszcze 1	CVlog	CVlog	CVlog	Obrzycko	weibull	weibull	SJg
Leszcze 2	gamma	Plog	Plog	Stęszew	gamma	SilvG	SilvG
Leszcze 3	gamma	CVlog	CVlog	Tuchorza	SilvG	gamma	SJg
Smolniki Powidzkie 1	Plog	Plog	Plog	Międzychód	weibull	CVg	CVg
Smolniki Powidzkie 2	lnorm	lnorm	Plog	Bęglewo	weibull	SJg	SJg
Łuszczewo	gamma	Plog	SilvG	Lipka	CVlog	CVlog	Plog
Mchowo	gamma	Plog	Plog	Gniezno	lnorm	Plog	Plog
Łączewna	weibull	weibull	SilvG	Piotrowice	CVlog	CVlog	Plog
Grabów nad Prosną	weibull	SilvG	SilvG	Leszno	weibull	SilvG	SilvG
Orkowo	CVg	CVlog	SJg	Chachalnia	weibull	weibull	CVg
Sowia Góra	CVg	CVlog	Plog	Julianowo	CVlog	CVlog	Plog
Kujan	lnorm	Plog	Plog	Wola Podłęzna	gamma	Plog	CVg

Estymatory jądrowe zaznaczone zostały za pomocą pogrubienia. / Kernel estimators are indicated in bold

Tabela 2. Liczba studni z podziałem ze względu na klasę najefektywniejszego estymatora (źródło: opracowanie własne)
Table 2. Well count distribution by most effective estimator class (source: Authors' own elaboration)

Typ studni / Type of well	RMSE		MAE		KLd	
	Typ estymatora / Estimator type					
	P	N	P	N	P	N
A	24 (66,7%)	12 (33,3%)	7 (19,4%)	29 (80,6%)	0 (0%)	36 (100%)
B	4 (44,4%)	5 (55,6%)	0 (0%)	9 (100%)	0 (0%)	9 (100%)
C	0 (0%)	5 (100%)	0 (0%)	5 (100%)	0 (0%)	5 (100%)

A – zwierciadło swobodne lub niskie ciśnienie, B – zwierciadło napięte, C – zwierciadło napięte, głębokość studni przekracza 120 m, P – estymator parametryczny, N – estymator nieparametryczny.

A – unconfined aquifer or low pressure conditions, B – confined aquifer, C – confined aquifer with well depth exceeding 120 m, P – parametric estimator, N – non-parametric estimator.

Tabela 3. Wartości miar dopasowania dla wybranych stacji Czachurki i Borówiec 2 (źródło: opracowanie własne)

Table 3. Goodness-of-fit metrics for the selected monitoring stations Czachurki and Borówiec 2 (source: Authors' own elaboration)

Estymator / Estimator		Czachurki			Borówiec 2		
Miara / Metrics		RMSE	MAE	KLd	RMSE	MAE	KLd
weibull		13,525	10,957	16529	18,826	12,186	27894
gamma		13,575	10,974	16741	18,744	12,158	26255
lognorm		13,587	10,979	16831	18,734	12,155	26167
beta		14,413	11,649	150188	19,019	12,394	162091
SilvG		13,561	10,959	16471	18,600	12,128	23866
CVg		13,576	10,964	16508	18,588	12,124	23863
sjg		13,571	10,962	16495	18,585	12,123	23884
CVlog		13,654	11,018	17324	18,567	12,106	23456
Plog		13,650	11,015	17336	18,618	12,123	23758

Rycina 4 przedstawia różnice pomiędzy najefektywniejszymi estymatorami parametrycznymi i nieparametrycznymi. Dla stacji Czachurki stwierdzono nieznacznie lepsze dopasowanie rozkładu Weibulla. Jednocześnie widać bardzo zbliżony kształt estymatora jądrowego, co sugeruje poprawne opisywanie zmienności poziomu wód podziemnych opisanego przez rozkład empiryczny. Dla stacji Borówiec 2 różnica pomiędzy estymatorami jest już bardzo znacząca. Estymator jądrowy cross-validation z jądrem log-nor-

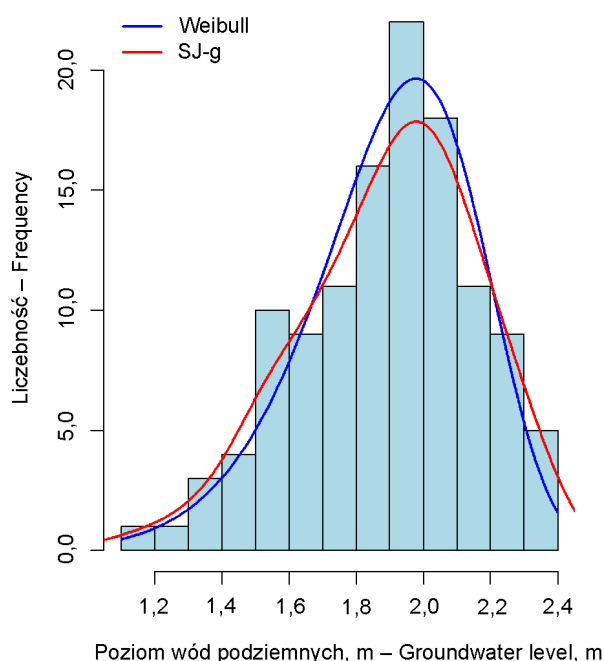
malnym bardzo dobrze się sprawdził zarówno w przypadku dużego skoku (przedział 13,5–15,0) w pierwszej części zakresu wartości, jak i samego ogona rozkładu (przedział od 16,5). Za pomocą metody parametrycznej opartej na rozkładzie log-normalnym nie da się poprawnie opisać wysokich wartości na samym początku, ponadto funkcja gęstości prawdopodobieństwa dąży do zera jeszcze przed wystąpieniem ogona rozkładu, co bezpośrednio obniża wartości kwantyli o wysokich prawdopodobieństwach.

Tabela 4. Wartości kwantyli dla wybranych stacji Czachurki oraz Borówiec 2 (źródło: opracowanie własne)

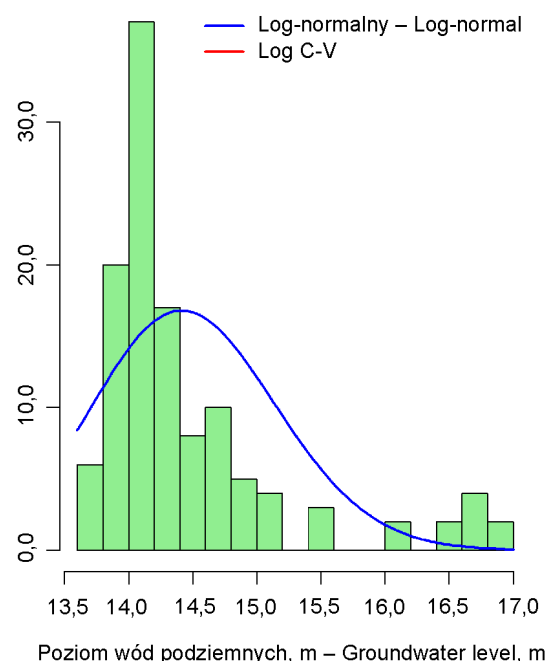
Table 4. Quantile values for selected stations Czachurki and Borówiec 2 (source: Authors' own elaboration)

Estymator / Estimator	Czachurki			Borówiec 2		
Kwantyl / Quantile	0,9	0,95	0,99	0,9	0,95	0,99
weibull	2,203	2,269	2,382	15,701	15,974	16,431
gamma	2,246	2,357	2,574	15,434	15,718	16,261
lognorm	2,259	2,380	2,627	15,393	15,672	16,208
beta	2,234	2,279	2,323	16,220	16,505	16,782
SilvG	2,232	2,306	2,416	15,441	16,565	16,927
CVg	2,243	2,321	2,448	15,445	16,581	16,899
sjg	2,239	2,316	2,438	15,448	16,585	16,892
CVlog	2,222	2,293	2,380	15,465	16,595	16,872
Plog	2,221	2,291	2,372	15,465	16,595	16,870

Stacja Czachurki, typ A – Czachurki station, type A



Stacja Borówiec 2, typ B – Borowiec station 2, type B



Ryc. 4. Porównanie dopasowania estymatorów parametrycznych (niebieski) i nieparametrycznych (czerwony) dla wybranych stacji Czachurki i Borówiec 2 (źródło: opracowanie własne)

Fig. 4. Fit comparison between parametric (blue) and non-parametric (red) estimators for the selected monitoring stations Czachurki and Borówiec 2 (source: Authors' own elaboration)

WNIOSKI

W niniejszej pracy oceniono zastosowanie estymacji nieparametrycznej oraz klasycznych metod parametrycznych do analizy minimalnych stanów położenia zwierciadła wód podziemnych.

Analiza dopasowania estymatorów do danych empirycznych wykazuje wyższą efektywność estymatorów jądrowych dla studni, w przypadku których czynniki przypowierzchniowe mają mniejszy wpływ na minimalne poziomy wód gruntowych. Uzyskane wyniki świadczą o istotnym znaczeniu kategorii systemu wodonośnego (A, B, C) dla efektywności estymacji. Studnie o zwierciadle swobodnym (kategoria A) wykazały przewagę estymatorów parametrycznych głównie pod względem błędu RMSE. W przypadku błędów MAE i KLd estymatory jądrowe wykazywały znacznie częściej wyższą efektywność. Studnie o zwierciadle napiętym (kategoria B) wykazywały przewagę efektywności estymatorów jądrowych, szczególnie przy zastosowaniu błędów MAE i KLd. Studnie o zwierciadle napiętym i głębokości poniżej 120 m pod poziomem terenu (kategoria C) w 100% wykazywały efektywność estymatorów jądrowych.

Rezultatem przeprowadzonych obliczeń były także wartości kwantyli dla minimalnych stanów położenia zwierciadła wód podziemnych. W niniejszej pracy pogłównie obliczono kwantyle rzędu 0,9, 0,95 oraz 0,99 dostępne w załączniku 2. Wartości te mogą być wykorzystane w badaniach poziomu wód podziemnych do analizy prawdopodobieństwa wystąpienia określonych stanów wód, w tym ekstremalnych wartości niskich poziomów.

W kontekście rosnącego ryzyka suszy, m.in. w regionach takich jak Wielkopolska, istotne jest dalsze rozwijanie i wdrażanie zaawansowanych metod estymacji i analizy danych. Praca ta sugeruje, że połączenie różnych podejść analitycznych, w tym zastosowanie estymatorów jądrowych, może znacząco przyczynić się do lepszego zarządzania zasobami wodnymi i efektywnego planowania działań adaptacyjnych w obliczu zmieniających się warunków klimatycznych.

W przyszłych badaniach warto poddać analizie wpływ cech hydrogeologicznych terenu na rozkład prawdopodobieństwa, może to przyczynić się do lep-

szego przewidywania skutków suszy oraz do opracowania skuteczniejszych strategii zarządzania zasobami wodnymi.

BIBLIOGRAFIA

- Bloomfield, J.P., Marchant, B.P. (2013). Analysis of groundwater drought building on the standardised precipitation index approach. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 17, 4769–4787. DOI: 10.5194/hess-17-4769-2013
- Bloomfield, J.P., Marchant, B.P., McKenzie, A.A. (2019). Changes in groundwater drought associated with anthropogenic warming. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 23, 1393–1408. DOI: 10.5194/hess-23-1393-2019
- Conway, D. (2013). Securing water in a changing climate. In: B. Lankford, K. Bakker, M. Zeitoun, D. Conway, D (Eds.), *Water security: Principles, perspectives and practices*, 80–100. Routledge, London.
- Dai, A. (2011). Drought under global warming: A review. *WIREs Clim. Change*, 2, 45–65. DOI: 10.1002/wcc.81
- Dastourani, M., Nazeri Tahroudi, M. (2022). Toward coupling of groundwater drawdown and pumping time in a constant discharge. *Appl. Water Sci.*, 12. DOI: 10.1007/s13201-022-01606-6
- Dobek, M. (2007). Reakcja zwierciadła wód podziemnych na opad atmosferyczny w latach 1961–1981 w wybranych punktach Wyżyny Lubelskiej. *Agron. Sci.*, 62, 49–55. DOI: 10.24326/as.2007.1.5
- Dragon, K., Gorski, J. (2015). Identification of groundwater chemistry origins in a regional aquifer system (Wielkopolska region, Poland). *Environ. Earth Sci.*, 73, 2153–2167. DOI: 10.1007/s12665-014-3567-0
- Durkowski, T., Jarnuszewski, G. (2016). Estimation of the influence of farm infrastructure on the pollution of ground water. *Inż. Ekol.*, 68–76. DOI: 10.12912/23920629/61453
- Hodson, T.O. (2022). Root-mean-square error (RMSE) or mean absolute error (MAE): When to use them or not. *Geosci. Model Dev.*, 15, 5481–5487. DOI: 10.5194/gmd-15-5481-2022
- Janga Reddy, M., Ganguli, P. (2012). Risk assessment of hydroclimatic variability on groundwater levels in the Manjara basin aquifer in India using Archimedean copulas. *J. Hydrol. Eng.*, 17, 1345–1357. DOI: 10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000564
- Jędruszkiewicz, J., Zieliński, M., Moniewski, P. (2016). Wpływ opadów na wahania zwierciadła wód gruntowych w zachodniej części wzniesień łódzkich. *Acta Geographica Lodziensia*, 104, 223–235.

- Kajewska-Szkudlarek, J., Kubicz, J., Kajewski, I., 2022. Correlation approach in predictor selection for ground-water level forecasting in areas threatened by water deficits. *J. Hydroinformatics*, 24, 143–159. DOI: 10.2166/hydro.2021.059
- Kalbarczyk, R., Kalbarczyk, E. (2022). Research into meteorological drought in Poland during the growing season from 1951 to 2020 using the Standardized Precipitation Index. *Agronomy*, 12, 2035. DOI: 10.3390/agronomy12092035
- Karczewski, M., Kaźmierczak, B., Michalski, A., Kuchar, L. (2022). Probability Function Estimation for the Maximum Precipitation Model using Kernel Estimators. *Rocz. Ochr. Śr.*, 24, 260–275. DOI: 10.54740/ros.2022.019
- Karczewski, M., Michalski, A. (2018a). The study and comparison of one-dimensional Kernel Estimators – A new approach. Part 1. Theory and methods. *ITM Web Conf.*, 23, 00017. DOI: 10.1051/itmconf/20182300017
- Karczewski, M., Michalski, A. (2018b). The study and comparison of one-dimensional Kernel Estimators – A new approach. Part 2. A hydrology case study. *ITM Web Conf.*, 23, 00018. DOI: 10.1051/itmconf/20182300018
- Kaznowska, E., Wasilewicz, M., Hejduk, L., Krajewski, A., Hejduk, A. (2024). The groundwater resources in the Mazovian lowland in central Poland during the dry decade of 2011–2020. *Water*, 16, 201. DOI: 10.3390/w16020201
- Kiryluk, A. (2019). The influence of drainage devices and post-bog soil changes on water retention in drained lower Supraśl River. *J. Ecol. Eng.*, 20, 120–128. DOI: 10.12911/22998993/110788
- Kowalczyk, A., Wesołowski, P., Woźnicka, M. (2016). Od powodzi do suszy – analiza zmian sytuacji hydrogeologicznej w Polsce w latach 2010–2015. *Biul. Państw. Inst. Geol.*, 123–136. DOI: 10.5604/01.3001.0009.4757
- Kozłowski, E., Beata, K., Dariusz, K., Dariusz, M. (2019). Survival function in the analysis of the factors influencing the reliability of water wells operation. *Water Resour. Manag.*, 33, 4909–4921. DOI: 10.1007/s11269-019-02419-0
- Kubicz, J. (2019). Analysis of groundwater level decrease in reaction to meteorological drought – using SPI and STI. *Acta Sci. Pol. Form. Circumiectus*, 18, 103–112. DOI: 10.15576/ASP.FC/2019.18.4.103
- Kubicz, J., Kajewski, I., Kajewska-Szkudlarek, J., Dąbek, P.B. (2019). Groundwater recharge assessment in dry years. *Environ. Earth Sci.*, 78, 555. DOI: 10.1007/s12665-019-8565-9
- Kubicz, J., Lochyński, P., Pawełczyk, A., Karczewski, M. (2021). Effects of drought on environmental health risk posed by groundwater contamination. *Chemosphere*, 263, 128145. DOI: 10.1016/j.chemosphere.2020.128145
- Łabędzki, L. (2016). Actions and measures for mitigation drought and water scarcity in agriculture. *J. Water Land Dev.*, 29, 3–10. DOI: 10.1515/jwld-2016-0007
- Lake, P.S. (2003). Ecological effects of perturbation by drought in flowing waters. *Freshw. Biol.*, 48, 1161–1172. DOI: 10.1046/j.1365-2427.2003.01086.x
- Loaiciga, H.A. (2015). Probability distributions in groundwater hydrology: Methods and applications. *J. Hydrol. Eng.*, 20. DOI: 10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001061
- Marcinkowski, P., Piniewski, M., Kardel, I., Szcześniak, M., Benestad, R., Srinivasan, R., Ignar, S., Okruszko, T. (2017). Effect of climate change on hydrology, sediment and nutrient losses in two lowland catchments in Poland. *Water*, 9, 156. <https://doi.org/10.3390/w9030156>
- Marcinkowski, P., Piniewski, M., Okruszko, T. (2024). Towards sustainable agricultural water management in Poland – How to meet water demand for supplemental irrigation? *Agric. Water Manag.*, 306, 109214. DOI: 10.1016/j.agwat.2024.109214
- Michalski, A. (2016). The use of kernel estimators to determine the distribution of groundwater level. *Meteorol. Hydrol. Water Manag.*, 4, 41–46. DOI: 10.26491/mhwm/62708
- Mishra, A.K., Singh, V.P. (2010). A review of drought concepts. *J. Hydrol.*, 391, 202–216. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2010.07.012
- Mizuki, C., Kuzuha, Y. (2023). Frequency analysis of hydrological data for urban floods – Review of traditional methods and recent developments, especially an introduction of Japanese proper methods. *Water*, 15, 2490. DOI: 10.3390/w15132490
- Mosley, L.M. (2015). Drought impacts on the water quality of freshwater systems; review and integration. *Earth-Sci. Rev.*, 140, 203–214. DOI: 10.1016/j.earscirev.2014.11.010
- Napiórkowski, J., Bogdanowicz, E., Kalinowska, M., Karamuz, E., Kochanek, K., Kuptel-Markiewicz, I., Nones, M., Senbeta, T.B. (2013). Human and climate impacts on drought dynamics and vulnerability. Presented at the 40th IAHR World Congress – “Rivers Connecting Mountains and Coasts,” Vienna, Austria, 2937–2941. DOI: 10.3850/978-90-833476-1-5_iahr40wc-p1629-cd
- Nowak, B., Ptak, M. (2018). Potential use of lakes as a component of small retention in Wielkopolska. *E3S Web Conf.*, 44, 00127. DOI: 10.1051/e3sconf/20184400127

- Nowicka, E., Olszewska, B., Pływaczyk, L., Łyczko, W. (2015). Changes of ground water levels in the Oder valley below the stage of water fall in Brzeg Dolny in the years 1971–2012. *Acta Sci. Pol. Form. Circumiectus*, 14, 169–178. DOI: 10.15576/ASP.FC/2015.14.1.169
- Nowicki, Z., Sadurski, A. (2010). Hydrogeological aspects of Quaternary sediments in Poland. *Biul. – Państwowe-go Inst. Geol.*, 441, 123–130.
- Okrusko, T., Piniewski, M., Marcinkowski, P. (2024). Analizy dotyczące potrzeb wodnych rolnictwa w Polsce, symulacje z wykorzystaniem modelu SWAT. Seminarium środowiskowe Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej – PIB oraz Uniwersytetu Przyrodniczego we Wrocławiu. <https://wiksig.upwr.edu.pl/nauka/seminarium-srodowiskowe/3-kwietnia-2024-r-analizy-dotyczace-potrzeb-wodnych-rolnictwa-w-polsce-symulacje-z-wykorzystaniem-modelu-swat-49.html> (dostęp: 25.04.2025).
- R Core Team (2023). R: A language and environment for statistical computing (manual). Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing.
- Rolbiecki, S., Kasperska-Wołowicz, W., Jagosz, B. i in. (2023). Water and irrigation requirements of glycine max (L.) Merr. in 1981–2020 in central Poland, central Europe. *Agronomy*, 13, 2429. DOI: 10.3390/agronomy13092429
- Rudnicki, R., Wiśniewski, Ł. (2022). Problem of water scarcity in agriculture – Case study of land improvement in Kujawsko-Pomorskie Voivodship. *J. Water Land Dev.*, 17–24. DOI: 10.24425/jwld.2021.139010
- Rutkoviene, V., Česonienė, L., Kutra, S. (2009). The influence of water use intensity on nitrate concentration in shallow well water. *Polish J. of Environ. Stud.*, 18, 3, 435–442.
- Stachowski, P., Markiewicz, J. (2011). The need of irrigation in central Poland on the example of Kutno county. *Rocz. Ochr. Środowiska*, 13, 1453–1472.
- Stanek-Tarkowska, J. (2022). Impact of water table fluctuations in dug wells on the content of nitrates in water. *J. Ecol. Eng.*, 23, 22–29. <https://doi.org/10.12911/22998993/147810>
- Szwed, M., Karg, G., Pińskwar, I. i in. (2010). Climate change and its effect on agriculture, water resources and human health sectors in Poland. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 10, 1725–1737. DOI: 10.5194/nhess-10-1725-2010
- Tang, Y., Marshall, L., Sharma, A., Smith, T. (2016). Tools for investigating the prior distribution in Bayesian hydrology. *J. Hydrol.*, 538, 551–562. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2016.04.032
- Taylor, R.G., Scanlon, B., Döll, P. i in. (2013). Ground water and climate change. *Nat. Clim. Change*, 3, 322–329. DOI: 10.1038/nclimate1744
- Trenberth, K.E., Dai, A., van der Schrier, G. i in. (2014). Global warming and changes in drought. *Nat. Clim. Change*, 4, 17–22. DOI: 10.1038/nclimate2067
- Van Loon, A.F. (2015). Hydrological drought explained. *WIREs Water*, 2, 359–392. DOI: 10.1002/wat2.1085
- Vicente-Serrano, S.M., Quiring, S.M., Peña-Gallardo, M. i in. (2020). A review of environmental droughts: Increased risk under global warming? *Earth-Sci. Rev.*, 201, 102953. DOI: 10.1016/j.earscirev.2019.102953
- Vroblesky, D.A., Casey, C.C., Lowery, M.A. (2007). Influence of dissolved oxygen convection on well sampling. *Groundw. Monit. Remediat.*, 27, 49–58. DOI: 10.1111/j.1745-6592.2007.00156.x
- Zeng, X., Wang, D., Wu, J. (2012). Sensitivity analysis of the probability distribution of groundwater level series based on information entropy. *Stoch. Environ. Res. Risk Assess.*, 26, 345–356. DOI: 10.1007/s00477-012-0556-2
- Ziernicka-Wojtaszek, A. (2021). Summer drought in 2019 on Polish territory – A case study. *Atmosphere*, 12, 1475. DOI: 10.3390/atmos12111475
- Ziernicka-Wojtaszek, A., Kopcińska, J. (2020). Variation in atmospheric precipitation in Poland in the years 2001–2018. *Atmosphere*, 11, 794. DOI: 10.3390/atmos11080794

APPLICATION OF KERNEL ESTIMATION IN THE STUDY OF THE DISTRIBUTION OF MINIMUM GROUNDWATER LEVELS

ABSTRACT

Aim of the study

Drought is one of the most significant environmental challenges of modern times, greatly affecting the availability of groundwater—a crucial resource in water management. The aim of this study is to demonstrate the effectiveness of kernel estimators in determining the distribution of minimum groundwater levels.

Material and methods

The study analyzes the distribution of minimum groundwater levels in the Wielkopolska region, an area particularly vulnerable to water shortages, during the hydrological period of 2001–2020. Data from 55 monitoring stations were used to compare the effectiveness of classical parametric methods with kernel estimation techniques proposed by the author. Additionally, three distinct error metrics were applied to assess the performance of the methods.

Results and conclusions

The results indicate that kernel estimation outperforms parametric methods in terms of accuracy for deeper wells with a confined aquifer. For unconfined aquifers, no clear advantage of either method was observed. The findings may contribute to improving forecasting methods for extreme groundwater levels and support water resource management in the context of increasing drought risk.

Keywords: drought, groundwater, nonparametric, kernel estimation, hydrogeology